



Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía.

Número de convocatoria del alumno

Nombre y apellido(s) del alumno

Número del colegio

Nombre del colegio

Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)

Mayo

Año

2012

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: Física

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: La aceleración gravitatoria en el movimiento de rodadura de esferas sólidas con diferentes masas y volúmenes como método de cálculo de energía disipada

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.

Confirmando que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: _

Fecha: 21-Feb-2012

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]: _____

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

Firma del supervisor: _____

_____ Fecha: 21/Febrero/2012

Monografía

Área: Física
Enfoque: Experimental

La aceleración gravitatoria en el movimiento de rodadura de esferas sólidas con diferentes masas y volúmenes como método de cálculo de energía disipada.

Candidato:

Matrícula:

Fecha de entrega: 03 de febrero de 2012

Asesor de monografía:

Palabras: 3983

Resumen

Esta monografía se centra en obtener de manera experimental una fórmula que se pueda utilizar para el cálculo de la energía disipada mediante valores de masa, volumen, altura inicial y tiempo que tarda en caer una esfera que rueda por un plano inclinado. Se ubicaron en un plano inclinado sensores para calcular el tiempo de desplazamiento entre dos puntos. Se estudió la diferencia entre energía inicial y energía final en la rodadura de esferas entre esos puntos. A partir del dato teórico de la gravedad se determinó un método de cálculo de energía disipada que complementaba la fórmula de conservación de la energía mecánica.

El primer experimento estudiaba la relación densidad-energía disipada y fue dividido en estudios de la relación volumen-energía disipada y masa-energía disipada. De este experimento se concluyó que la disipación de energía no dependía del volumen, pero sí, de manera directamente proporcional, de la masa de la esfera.

El segundo experimento estudiaba la relación altura inicial-energía disipada. De este experimento se concluyó que la energía disipada depende de manera directamente proporcional de la altura inicial.

La dificultad de la investigación consistió en armonizar las diferentes relaciones entre variables. Mediante el análisis de los datos se dedujo la siguiente fórmula:

$$E_d = 0.86 m v f^2$$

Donde m es masa, $v f$ es velocidad final y E_d energía disipada. Utilizando esta fórmula para el cálculo de la gravedad, se comprobó su certeza. A final de cuentas resultó ser acertada. La investigación cumplió con su objetivo. Algunas limitaciones son: sólo se estudiaron ángulos pequeños; no se estudiaron los efectos de la deformación elástica, la fricción entre la superficie y la esfera o el deslizamiento.

Palabras: 273

Índice

La aceleración gravitatoria en el movimiento de rodadura de esferas sólidas con diferentes masas y volúmenes como método de cálculo de energía disipada.....	1
Resumen.....	2
Índice.....	3
Introducción.....	4
Problema de Investigación.....	4
Plan y diseño.....	7
Desarrollo.....	10
Experimento I.....	10
Procedimiento.....	10
Datos.....	11
Análisis.....	12
Experimento II.....	18
Procedimiento.....	18
Datos.....	18
Análisis.....	20
Discusión y extrapolación.....	24
Conclusión.....	26
Bibliografía.....	27
Apéndice.....	28
Experimento 1.....	28
TABLA 1.....	28
TABLA 2.....	29
TABLA 3.....	31
Experimento 2.....	33
TABLA 4.....	33
TABLA 5.....	34
TABLA 6.....	35

Introducción

Problema de Investigación

¿Sería posible determinar experimentalmente una fórmula de obtención de energía disipada mediante valores de masa, volumen, altura inicial y tiempo de una esfera que rueda sobre un plano inclinado?

En mis estudios de mecánica me topé con uno de los temas que más me llamó la atención en los primeros meses de preparatoria: la ley de la conservación de la energía. Esta ley dice que la energía representa una cantidad abstracta y constante¹ que, sin importar los cambios que sucedan en la naturaleza, en términos absolutos permanecerá igual. Las prácticas de laboratorio me llevaron a pensar más profundamente en esto, especialmente en lo distante que parecía, en un principio, la práctica de la realidad. Me pregunte entonces si sería posible encontrar una fórmula con la que pudiera estudiar la conservación de la energía en un sistema cerrado. Combinando la curiosidad del tema de la energía con otras prácticas, de obtención de gravedad, pensé que se podría realizar la siguiente investigación.

El objetivo de esta monografía es **obtener de manera experimental una fórmula que se pueda utilizar para el cálculo de la energía disipada en la rodadura de esferas sobre un plano inclinado mediante valores de masa, volumen, altura inicial y tiempo que tarda en caer una esfera que rueda por un plano inclinado**. Esta fórmula se basará en dos fundamentos: una parte teórica que considerará la conservación de la energía mecánica y una parte experimental, que partirá del análisis de velocidad final en el sistema. Para realizar el experimento se consiguieron esferas de diversos tamaños y masas, todas las esferas sólidas, no huecas. Se tendrá un enfoque claramente experimental, pero no se sacarán conclusiones puramente de los datos empíricos.

Para comprender a profundidad la investigación hace falta entender algunos conceptos claves que complementan el tema de la conservación de la energía. Primero que nada habrá que tratar de entender qué es la energía. Entre otras definiciones encontramos que: la energía es *"la idea más abstracta en física por ser un principio matemático [...] No es la descripción de un mecanismo ni nada concreto; es solo un hecho extraño"*² y que *"la energía puede considerarse algo que es posible convertir en trabajo. Cuando decimos que un objeto tiene energía, significa que es capaz de ejercer una fuerza sobre otro objeto para realizar un trabajo sobre él"*³. Como se puede notar, la energía es un concepto difícil de entender pues es una magnitud abstracta, pero en general es la capacidad de un sistema de

¹ Feynman, Richard; Leighton, Robert; Sands, Matthew. *"The Feynman Lectures on Physics"*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1977. 4-1.

² *Ibíd.* 4-1.

³ Tippens, Paul E. *"Física, conceptos y aplicaciones"* McGraw Hill. México. 2001. p.161.

realizar un trabajo. A esta capacidad se le puede dar un valor numérico mediante fórmulas determinadas de modo empírico como lo son⁴:

$$U = Wh$$

En donde U es energía potencial gravitacional, W es peso y h es altura, o⁵:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

En donde K es energía cinética, m es masa y v es velocidad instantánea. Como estas fórmulas hay muchas para cálculos de energía calorífica, elástica, eléctrica, radiante⁶, etc.

Como esta monografía se centra en la rama mecánica de la física, se puede pensar en dos principales tipos de energía que nos interesan: la energía potencial gravitacional y la energía cinética (citadas anteriormente). La primera corresponde a la capacidad de un cuerpo de realizar un trabajo en virtud de su posición respecto a otro cuerpo (por ejemplo el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al caer un objeto). La segunda hace referencia a la capacidad de un cuerpo de realizar un trabajo en virtud de su movimiento. También es importante para esta monografía la energía cinética rotacional, derivada de la cinética, que se calcula de la siguiente manera⁷:

$$K_r = \frac{I\omega^2}{2}$$

En donde K_r es energía cinética rotacional, I es momento de inercia y ω es velocidad angular instantánea, pero por el objetivo de la investigación se supondrá que no se conoce esta fórmula.

En la situación experimental de esta monografía se busca diseñar un sistema en el que sólo se tenga que tomar en cuenta la energía cinética final y potencial gravitatoria, complementada con la aceleración gravitatoria, para obtener el valor de la energía disipada. Para ello se supondrá que no se conocen las fórmulas para calcular otros tipos de energía que pudieran influir. Se tomará la gravedad teórica como⁸ 9.806 m/s².

Parte de la importancia del estudio radica en analizar la interrelación que tienen la teoría y su base experimental. El análisis que se le puede dar a esta relación es sencillo y de poco alcance debido a la naturaleza de la investigación (con limitantes tanto de recursos como de conocimientos), pero es una parte importante de la íntegra comprensión científica de cualquier investigación.

⁴Feynman, Richard; Leighton, Robert; Sands, Matthew. Op.Cit. 4-2

⁵Tippens, Paul E. "Física, conceptos y aplicaciones" McGraw Hill. México. 2001. p.193

⁶Feynman, Richard; Leighton, Robert; Sands, Matthew. "The Feynman Lectures on Physics". Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1977. 4-1

⁷Tippens, Paul E. Op. Cit. p.228.

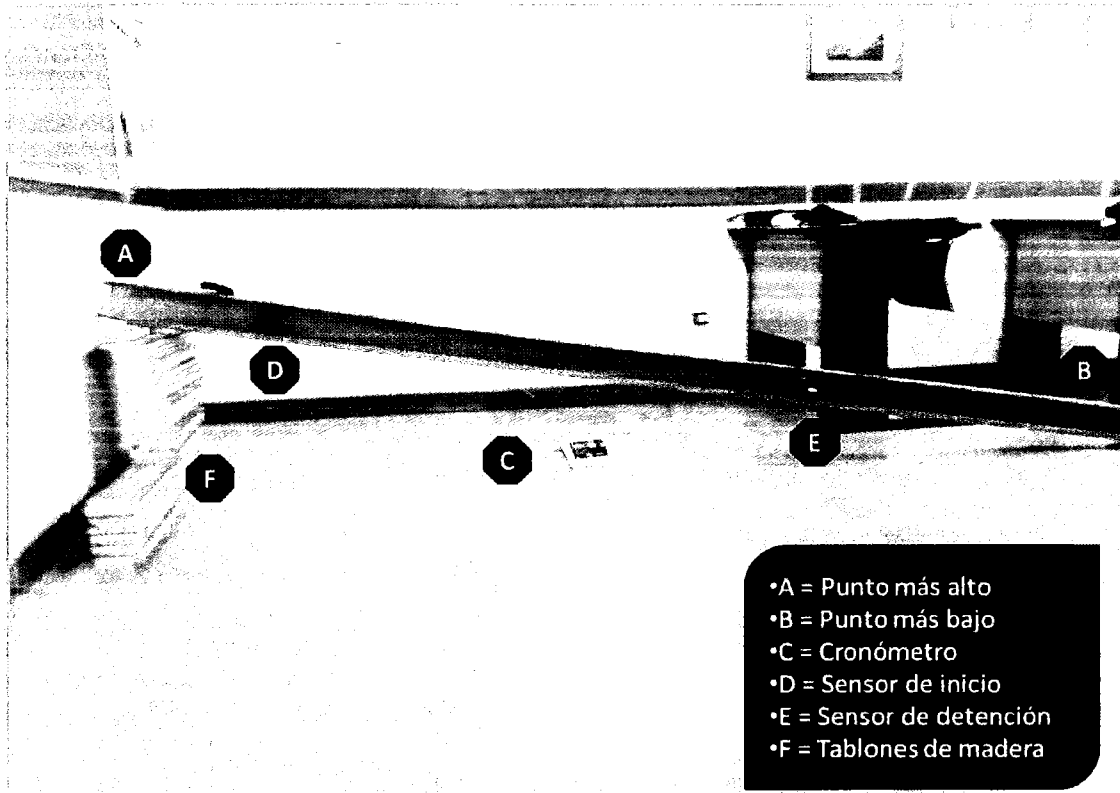
⁸Ibíd. p.121

Plan y diseño

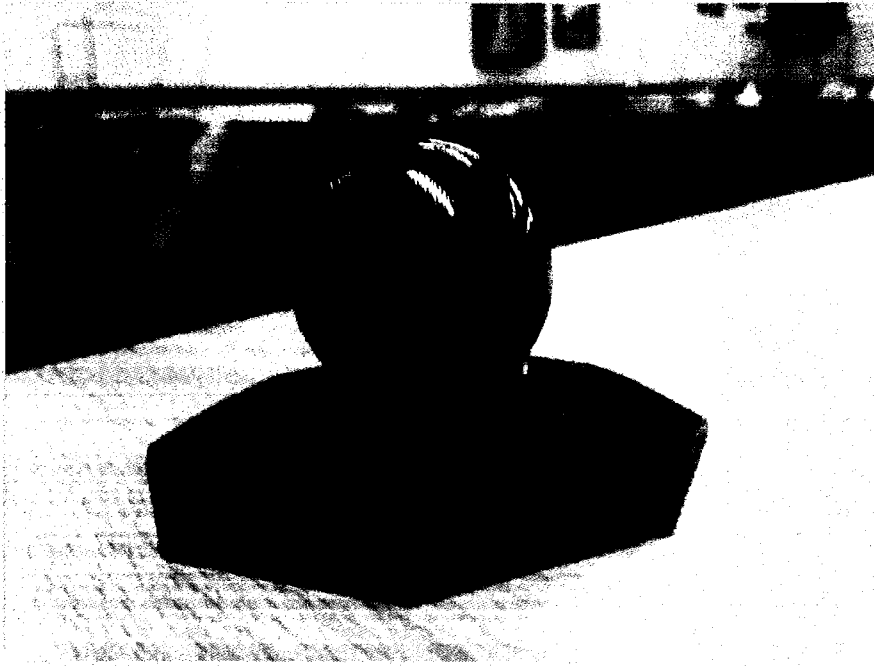
Los instrumentos y materiales utilizados para el experimento son:

- Plano inclinado de metal ($3.1381 \pm 0.0001 \text{m}$).
- Dos sensores de movimiento con precisión a diezmilésimas ($\pm 0.0001 \text{s}$).
- 36 tablones de madera (de aproximadamente $1.20 \pm 0.01 \text{ cm}$ cada uno).
- Cronómetro activado y desactivado por los sensores.
- 26 esferas de diversas masas y volúmenes.
- Balanza mecánica, que será recalibrada al principio de la práctica.

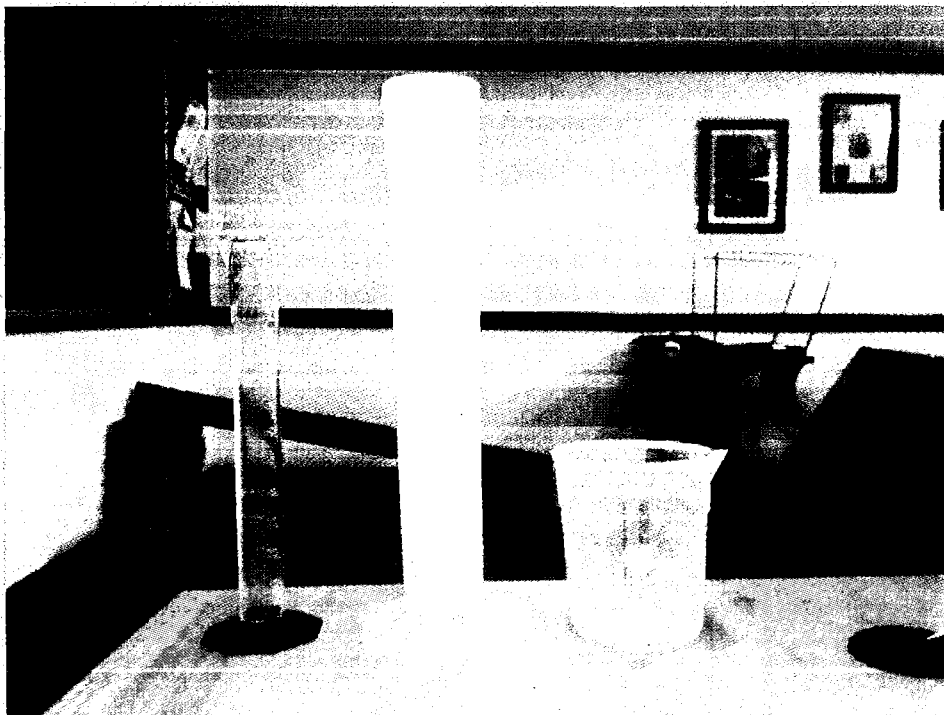
El diseño del aparato utilizado en la prueba de ambos experimentos es el siguiente:



El plano inclinado se recarga sobre los tablones que se utilizan con tal de poder variar la altura del plano. Tanto en el punto D como en el punto E se encuentran los sensores que sirven para iniciar y detener el cronómetro. Se consiguieron esferas de diversas masas y volúmenes. Las esferas son principalmente canicas:



Para medir las masas de las esferas se tiene una balanza mecánica con incertidumbre de ± 0.00005 kg. El volumen será obtenido en diferentes probetas de incertidumbres ± 0.5 v ± 1 . aparte de un vaso de precipitados con incertidumbre de ± 12 ml:



Las esferas se sueltan en el punto **A** y ruedan hasta el punto **B**. En su trayecto pasan por los sensores que activan y apagan el cronometro utilizado para calcular su velocidad. Los sensores tienen puntos fijos en el plano, por lo que la distancia entre ellos es constante.

La investigación analizará los resultados de dos variantes del mismo experimento, ambas de diseño personal. Se diseñará un sistema cerrado⁹ en el que se controlen variables que puedan afectar mediante pérdidas o entradas de energía. Es muy difícil controlar todas las entradas y salidas de energía en un sistema, sin embargo se controlaron las variables que los recursos y la creatividad científica permitían controlar

El diseño tiene algunas limitantes. El plano inclinado podría llegar a encorvarse debido a su propio peso. Esto tendría un efecto de error sistemático en las conclusiones finales. El plano tiene un pequeño borde de un lado y una pared de otro con tal de evitar que las esferas se desvíen y caigan, sin embargo las esferas no tienen una trayectoria definida. El ancho del plano da espacio a las esferas para rodar. Se pensó en evitar este problema implementando un canal de maderas en ambos lados (dentro del plano inclinado), pero los efectos del rozamiento impedirían la libre rodadura de las esferas, por lo que se evitó. De deslizarse algunas esferas, la transformación de energía sería diferente en las diversas pruebas, por lo que el análisis no sería acertado. Por último, un efecto difícil de cuantificar es el de la deformación elástica de las esferas por su movimiento. Esto podría causar errores aleatorios en el análisis comparativo de esferas de diferentes materiales.

⁹ "cerrado" hace referencia a que es un sistema en el que se controlan las condiciones y no manipula, en la medida de lo posible, la entrada y salida de energía.

Desarrollo

Experimento I

Procedimiento

En todo proceso se disipa energía. Este primer experimento busca comenzar la formulación de la ecuación de disipación de energía. Se tomarán en cuenta dos tipos de energía para el desarrollo teórico de la fórmula y se complementará este desarrollo con el análisis de datos del experimento. La fracción teórica se fundamenta en la conservación de la energía mecánica¹⁰.

Se planea analizar la disipación de energía en el sistema diseñado y ver de qué modo depende de otras variables. Las variables se clasificarán de la siguiente manera:

Variables controladas:

- Altura inicial, h ($0.4652 \pm 0.0005\text{m}$): La altura a la que comienza a rodar la esfera tomando como referencia el suelo.
- Desplazamiento sobre el plano, x ($0.7463 \pm 0.0005\text{m}$): Medido con cinta de medir; comprende la distancia entre los sensores.
- Altura real, h_r ($0.1108 \pm 0.0005\text{m}$): Corresponde al desplazamiento vertical de la esfera, dado que no se tomará en cuenta toda la distancia vertical sino sólo la que hay entre los sensores.
- Longitud del plano, l ($3.1381 \pm 0.0005\text{m}$): Sirve para calcular la inclinación del plano al ser relacionado con la altura inicial.

Variable manipulada:

- Densidad ρ .

Variable independiente:

- Tiempo t .

De cada esfera se calculará la masa y volumen con tal de calcular densidad. Teniendo la densidad se harán 2 pruebas por esfera en las que se medirá el tiempo que tardan en desplazarse entre los sensores. A partir del tiempo se calculará la velocidad final y con esto último la energía final. Las diferencias de energía se graficarán contra los valores de densidad para buscar una correlación. Al final se comprobará la utilidad de la fórmula aplicándola para el cálculo de aceleración gravitatoria. Antes de comenzar se calibrará la balanza.

¹⁰ Paul E Tippens habla en concreto de la conservación de energía mecánica (más que conservación de energía absoluta). En este principio se piensa solo en la suma de la energía potencial gravitacional y la energía cinética. Esta idea se complementa con la idea propia (que se comprobará con la experimentación) de que a la fórmula hay que agregarle un factor de energía disipada (que es necesaria en cálculos experimentales más que teóricos).

Datos

La totalidad de los datos medidos y calculados se encuentran en la subsección "Experimento 1" del apéndice. En esta parte sólo se hará referencia a los cálculos realizados.

De cada esfera se midió masa y volumen. A partir de esos datos se hizo un cálculo de sus densidades con la siguiente fórmula¹¹:

$$\rho = \frac{m}{v}$$

En donde ρ es densidad, m es masa y v es volumen.

Una vez calculada la densidad, cada esfera se hizo rodar 2 veces sobre el plano y se tomó el tiempo de desplazamiento. El tiempo fue utilizado para calcular la velocidad final de las esferas con las siguientes fórmulas¹²:

$$x = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

Donde x es desplazamiento sobre el plano, v_i es velocidad inicial, t es tiempo, a es aceleración sobre el plano. Dado que no hay velocidad inicial se puede despejar la aceleración sobre el plano:

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$a = \frac{2x}{t^2}$$

Con esta última fórmula se llega a la aceleración que sirve para calcular la velocidad final¹³:

$$v_f = at = \frac{2x}{t}$$

Una vez realizado el cálculo de la velocidad final se procede a calcular la energía inicial, energía final y energía disipada. Los cálculos se obtienen mediante las siguientes fórmulas:

$$E_i = E_f + E_d$$

En donde E_i es energía inicial, E_f es energía final y E_d es energía disipada;

¹¹ Tippens, Paul E. "Física, conceptos y aplicaciones" McGraw Hill. México. 2001. p.302

¹² Ibíd. p.117

¹³ Ibíd. p.117

$$U_g = K + E_d$$

En donde U_g es energía potencial gravitatoria en el punto inicial y K es energía cinética final;

$$mgh_r = \frac{mvf^2}{2} + E_d$$

En donde m es masa, g es gravedad, h_r es altura real, y v es velocidad final;

$$E_d = mgh_r - \frac{mvf^2}{2}$$

En este cálculo se utiliza la gravedad teórica¹⁴ (9.806 m/s²) y la altura real de la energía potencial gravitacional es constante (0.1108±0.0005m)¹⁵.

En cuanto al cálculo de los errores en las mediciones:

- El error en un cálculo de multiplicación o división se da de la suma de errores relativos de las medidas iniciales. El cálculo de errores relativos se da por la siguiente fórmula¹⁶:

$$\delta z = \frac{\Delta z}{z}$$

Donde δ es error relativo y Δ es error absoluto

- El cálculo de errores en una suma o resta, utilizada en la obtención de la energía disipada, viene dado por la suma de las incertidumbres absolutas.

Análisis

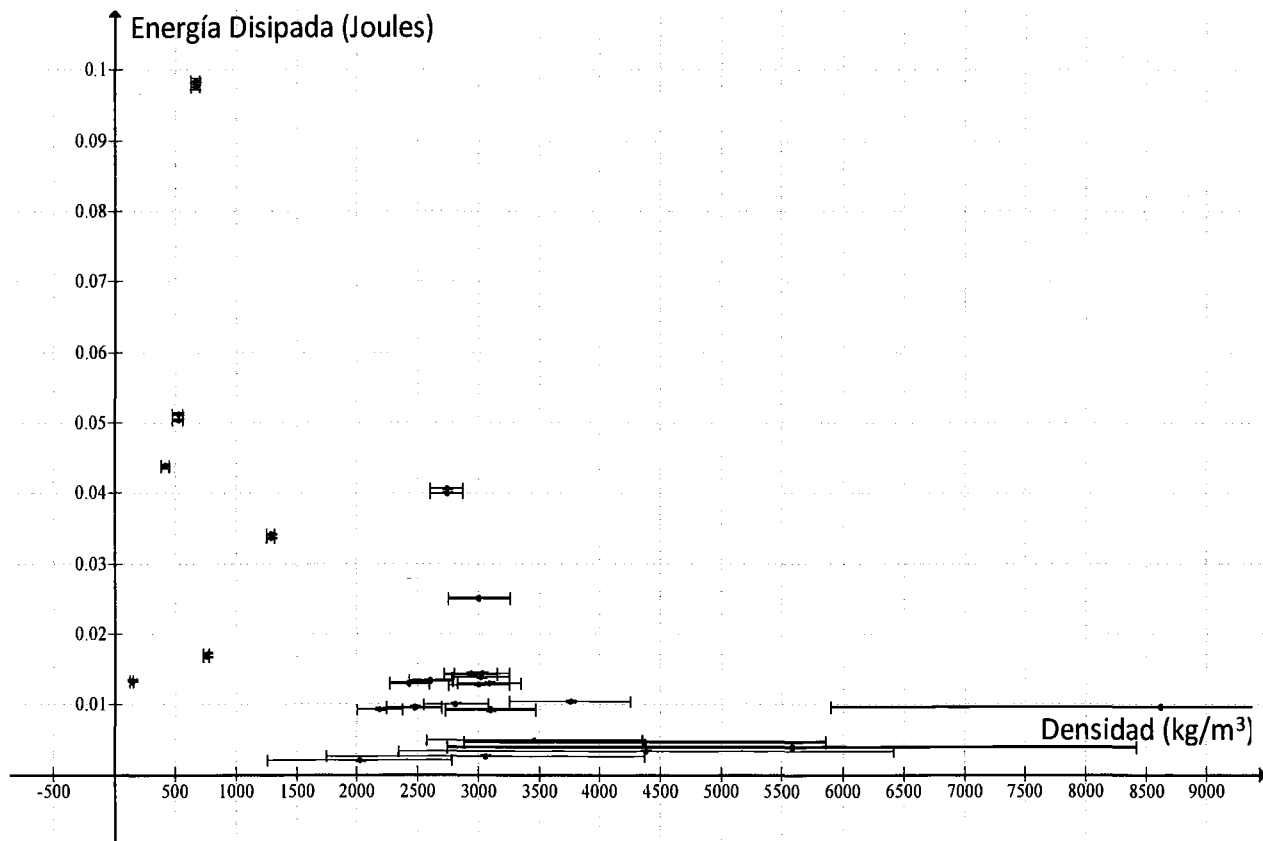
La siguiente es una gráfica de los valores de energía disipada contra densidad de la esfera¹⁷:

¹⁴ Tippens, Paul E. "Física, conceptos y aplicaciones" McGraw Hill. México. 2001. p.228.

¹⁵ Medición hecha anteriormente y referenciada en el *Plan y diseño*.

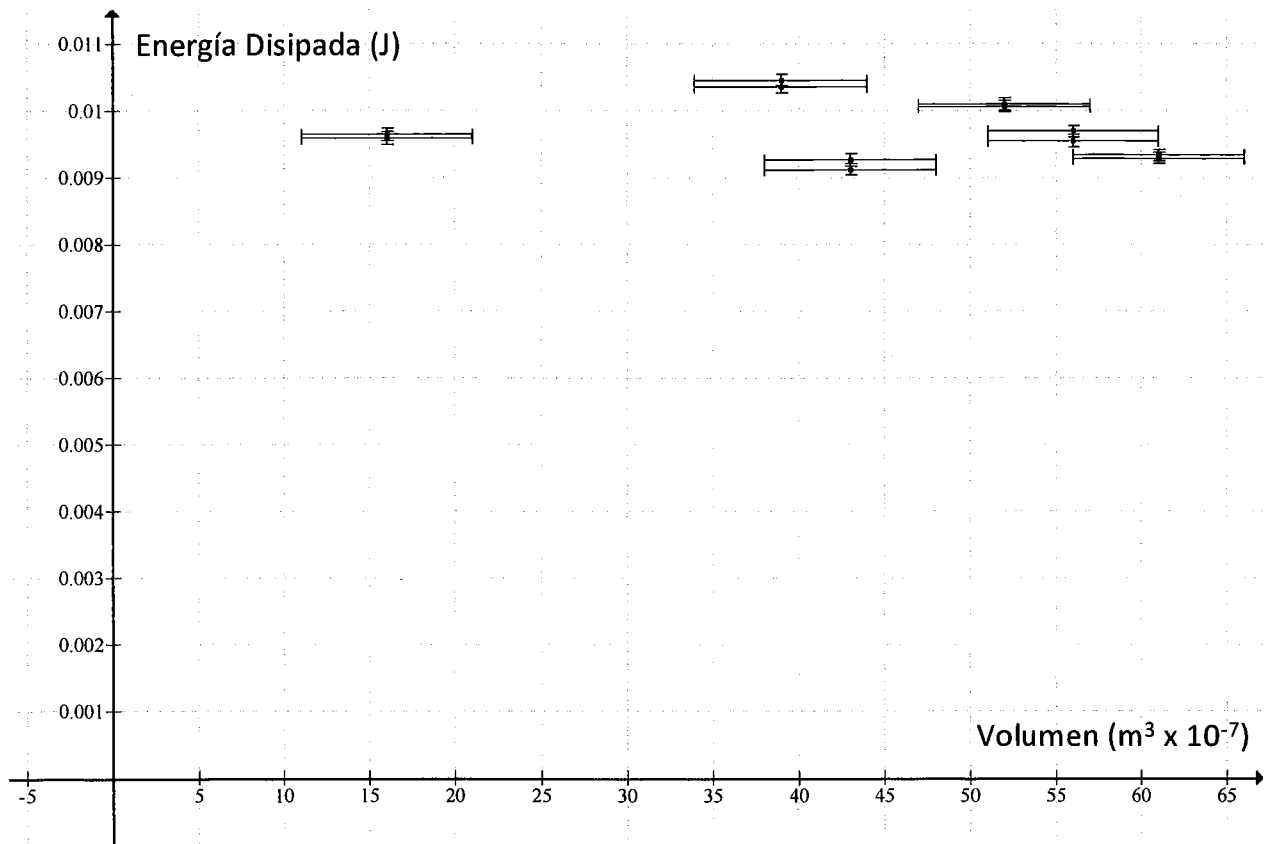
¹⁶ Peterson, John C. "Matemáticas básicas" Grupo editorial Patria. México. 2009. p.31.

¹⁷ Los gráficos fueron realizados utilizando el programa *Graph*.



Se pensó principalmente en tres puntos importantes en este análisis: En primer lugar no hay ninguna interdependencia observable entre las variables, se puede afirmar que la energía no depende de la densidad; En segundo lugar, cabe mencionar que algunas incertidumbres en las mediciones de volumen fueron porcentualmente muy altas, por lo que hay gran incertidumbre en las densidades calculadas; Por último, y de gran importancia es que debido a la limitación en los recursos obtenidos, al manipular la densidad en realidad se tienen dos variables manipuladas (masa y volumen)¹⁸. Tratando de resolver el último punto se graficarán ahora los valores de energía disipada contra volumen, pero sólo de esferas de aproximadamente igual masa:

¹⁸ Esto se podría haber evitado obteniendo esferas de iguales volúmenes pero distintas masas o igual masa y distinto volumen.

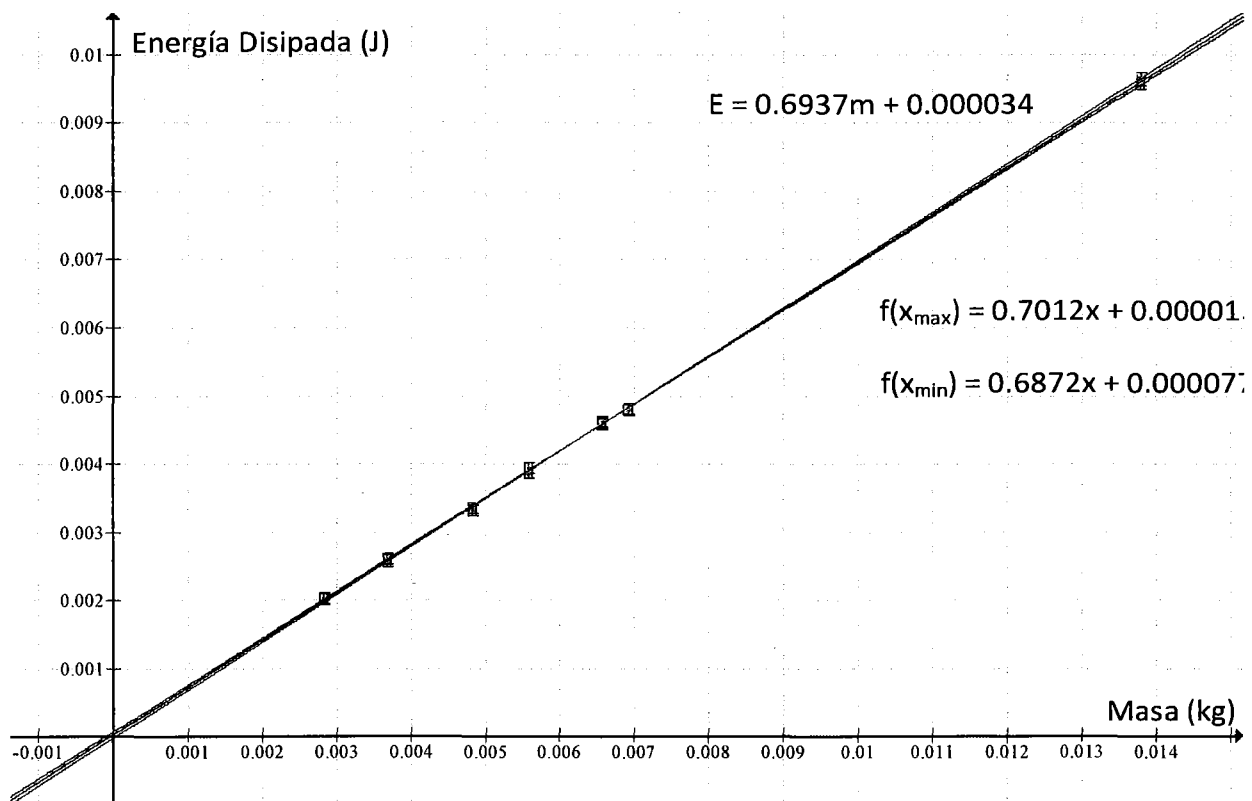


Se escogieron para este gráfico las pruebas de las esferas con masas en el siguiente rango:

$$0.013 \text{ kg} < x < 0.015 \text{ kg}$$

De la gráfica se puede apreciar que a diferentes volúmenes, la energía permanece constante, sin embargo esta afirmación no es concluyente por que el rango de masas es relativamente amplio. Se ha resuelto el problema de manipular dos variables a la vez, sin embargo, los errores en las mediciones siguen siendo porcentualmente altos. Para completar la investigación experimental habría que graficar los valores de energía disipada contra masa, con tal de manipular por separado las dos variables que componen la densidad. Con esto se resolvería el problema de las altas incertidumbres porcentuales pues las mediciones de masa fueron muy precisas. Parecería teóricamente más probable que haya una correlación pues la energía en la mayoría de sus casos depende de alguna manera de la masa del objeto.

De la gráfica de energía contra volumen podría concluirse que, como la energía disipada no depende del volumen, se podrían graficar todas las pruebas, sin controlar la variable del volumen, y la relación entre masa y energía se respetaría, sin embargo se ha decidido graficas sólo las pruebas de esferas con volumen en cierto rango con fines de controlar todos los factores posibles excepto masa y energía.



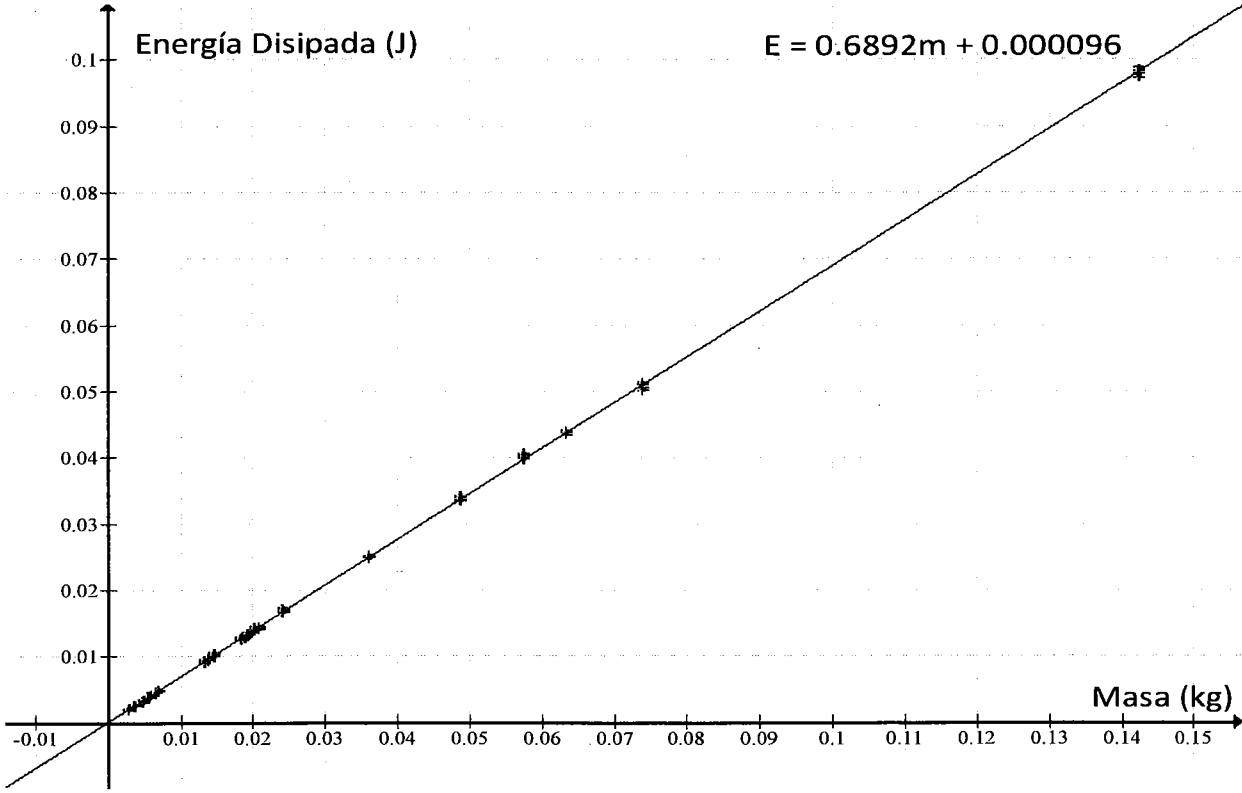
El rango de volúmenes dentro del cual se seleccionaron pruebas realizadas para graficar es el siguiente:

$$0.000001 \text{ m}^3 < x < 0.000002 \text{ m}^3$$

En esta tercera gráfica hay una clara interdependencia entre las variables. La correlación de Pearson de la serie de datos es de 0.9997, que es un valor muy bueno de correlación positiva. Se puede concluir entonces que a mayor masa mayor energía disipada. Y dado que la gráfica apunta a ser una recta creciente, la interdependencia es de proporcionalidad directa: a mayor masa, mayor energía disipada. No sólo se sabe que hay una proporcionalidad directa sino que la pendiente de la gráfica indica el valor constante que determina esa relación. En este caso podemos decir que:

$$E_d = 0.6937 m$$

Con lo anterior, inclusive se podrían graficar las 55 pruebas realizadas. Los puntos deberían dibujar una ecuación de primer grado con pendiente de 0.69:



La gráfica cumple con la proyección hecha.

El siguiente paso en esta investigación es aplicar la fórmula desarrollada a los datos en una aplicación concreta: el cálculo de gravedad. Esto con tal de comprobar su certeza. Anteriormente se llegó a que:

$$Ed = mgh_r - \frac{mvf^2}{2}$$

Por lo que:

$$0.69m = mgh_r - \frac{mvf^2}{2}$$

$$mgh_r = \frac{mvf^2}{2} + 0.69m$$

Se eliminan entonces las masas de ambos lados de la ecuación y se despeja la gravedad:

$$g = \frac{\frac{vf^2}{2} + 0.69}{h_r} = \frac{\left(\frac{2x}{t}\right)^2 + 0.69}{h_r} = \frac{\frac{2x^2}{t^2} + 0.69}{h_r}$$

Con esta fórmula se recalcula la gravedad a partir de los datos calculados en las pruebas anteriores¹⁹. El promedio de los valores de gravedad calculados es de:

$$g_c = 9.75 \pm 0.15 \frac{m}{s^2}$$

Se buscará ahora extrapolar el análisis en una prueba aislada bajo diferentes condiciones. Lo que cambiará será la altura.

Los valores medidos de la prueba son los siguientes:

h_r : 0.108 ± 0.001 m

t : 3.5880 ± 0.0001 s

x : 0.7463 ± 0.0005 m

$$g = \frac{\frac{2(0.7463)^2}{3.588^2} + 0.69}{0.108} = 30.23 \text{ m/s}^2$$

Es evidente que hay un error en la fórmula. El análisis hecho es insuficiente para determinar que le falta a la fórmula, por lo que hace falta complementar este primer experimento con otro que complete las variables a manipular.

¹⁹ Los valores calculados se encuentran en la **TABLA 1** del apéndice, con su respectivo cálculo de incertidumbre en las **TABLAS 2 y 3**.

Experimento II

Procedimiento

Una variable importante en el análisis de energía es el movimiento, cuantificado como velocidad. Por ello es que será observado en este próximo experimento. Con tal de variar la velocidad final se cambiará la altura real que recorren las esferas. La altura permaneció controlada en el experimento anterior a lo largo de las pruebas.

En este segundo experimento las variables se clasificarán de la siguiente manera:

VARIABLES CONTROLADAS:

- Densidad ρ , masa m y volumen v : Para todas las pruebas se utilizará la misma esfera. La esfera tiene una masa de 0.01894 ± 0.00005 kg, una densidad de 2428 ± 162 kg/m³ y un volumen de 0.0000078 ± 0.000001 m³.
- Desplazamiento sobre el plano, x (0.7463 ± 0.0005 m): Medido con cinta de medir; comprende la distancia entre los sensores.
- Longitud del plano, l (3.1381 ± 0.0005 m): Sirve para calcular la inclinación del plano al ser relacionado con la altura inicial.

VARIABLE MANIPULADA:

- Altura inicial, h : La altura a la que comienza a rodar la esfera tomando como referencia el suelo. Se refiere a los tablones. Al cambiar la altura inicial también cambia la altura real h_r .

VARIABLE INDEPENDIENTE:

- Tiempo, t : Se observará como cambia el tiempo de desplazamiento y con esto se calculará la diferencia de energías.

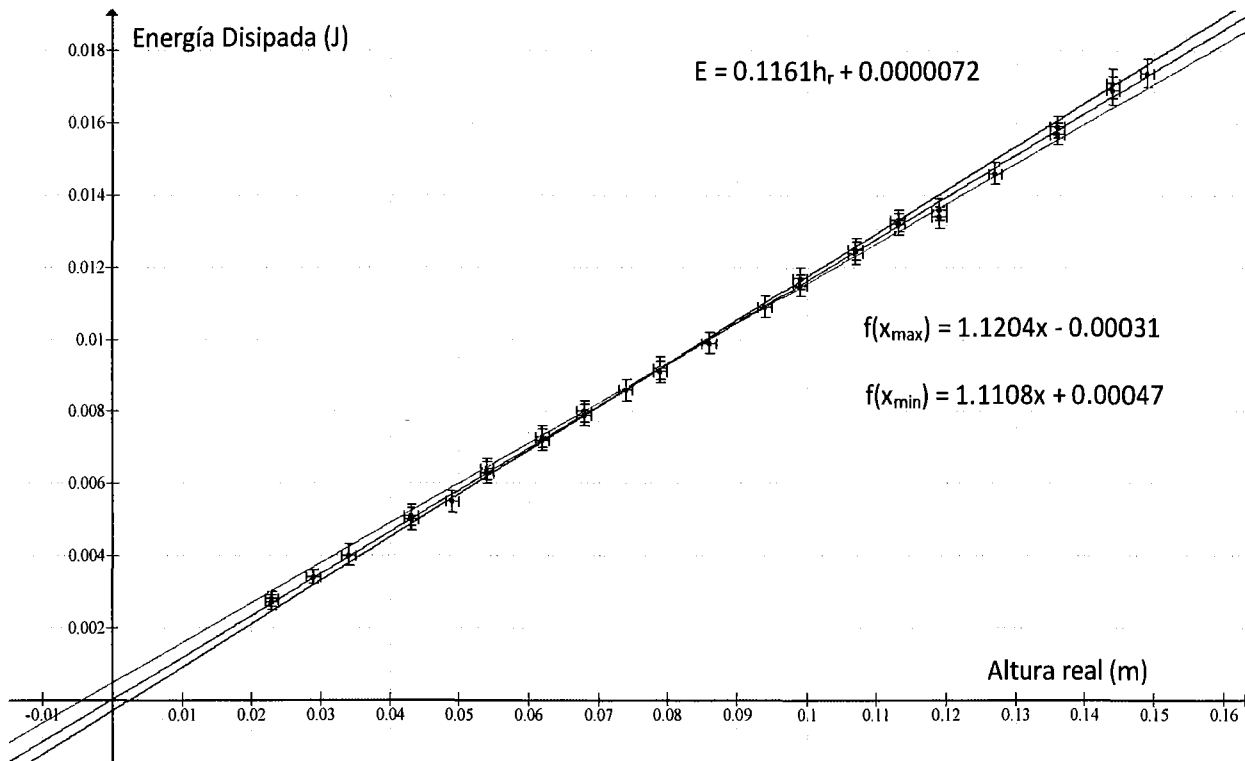
Se harán dos pruebas con cada una de las 20 alturas a experimentar. En cada prueba se soltará una esfera sólida cerca de la parte más alta del plano, donde se ubica el sensor. De cada prueba se tomará el tiempo de desplazamiento entre los sensores del plano inclinado. Se utilizará una misma esfera en todas las pruebas. Aunque se tienen tablones de aproximadamente 1.2 cm de grosor, se medirá cada altura independientemente de la anterior con el fin de evitar errores por diferencias mínimas en los grosores de los tablones. A partir del tiempo se calculará la velocidad final y con esto último la energía final. Las diferencias de energía se graficarán contra alguna representación de las alturas y se analizarán los resultados.

Datos

Debido a la extensión que tomaría el trabajo de incluir las tablas de datos en el cuerpo se han anexado en el apéndice. Todos los datos referentes a este experimento son condensador en las 3 tablas de la subsección "Experimento 2" del apéndice.

Análisis

El primer gráfico es de las diferentes alturas reales medidas contra la energía disipada en cada prueba:



El análisis de este experimento es más sencillo que el del anterior. En primer lugar, es evidente que hay una correlación entre la altura desde la que comienza rodar la esfera y la energía total que se disipa. Como la gráfica tiene forma de recto creciente podemos decir que la correlación es de proporcionalidad directa. Los márgenes de error son porcentualmente bajos tanto de energía disipada como de altura real. Para concluir este experimento habrá que traducir la gráfica a una fórmula:

$$E_d = 0.116 h_r$$

Aunque esta fórmula experimentalmente acertada, convendría para la fórmula teórica tomar en cuenta los cambios expresados en base a la velocidad final de los móviles, no la altura de la que ruedan. Por ello se realiza la siguiente gráfica:

De cada prueba se tomó el tiempo y del mismo modo que en el experimento anterior se calculó la velocidad final. Se procedió a calcular la energía inicial y final del con las mismas fórmulas que en el experimento anterior. La única variación en los cálculos se dio en la medición de la altura real. Para la transformación de energía potencial a cinética sólo se toma en cuenta hasta el punto en el que se encuentra el sensor más bajo. La altura real vino dada por las siguientes fórmulas²⁰:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{h}{l}$$

Donde θ es el ángulo opuesto a la altura absoluta del plano, h es la altura inicial del plano y l es la longitud total del plano. Este mismo ángulo de inclinación es el que tiene todo el plano, por lo que:

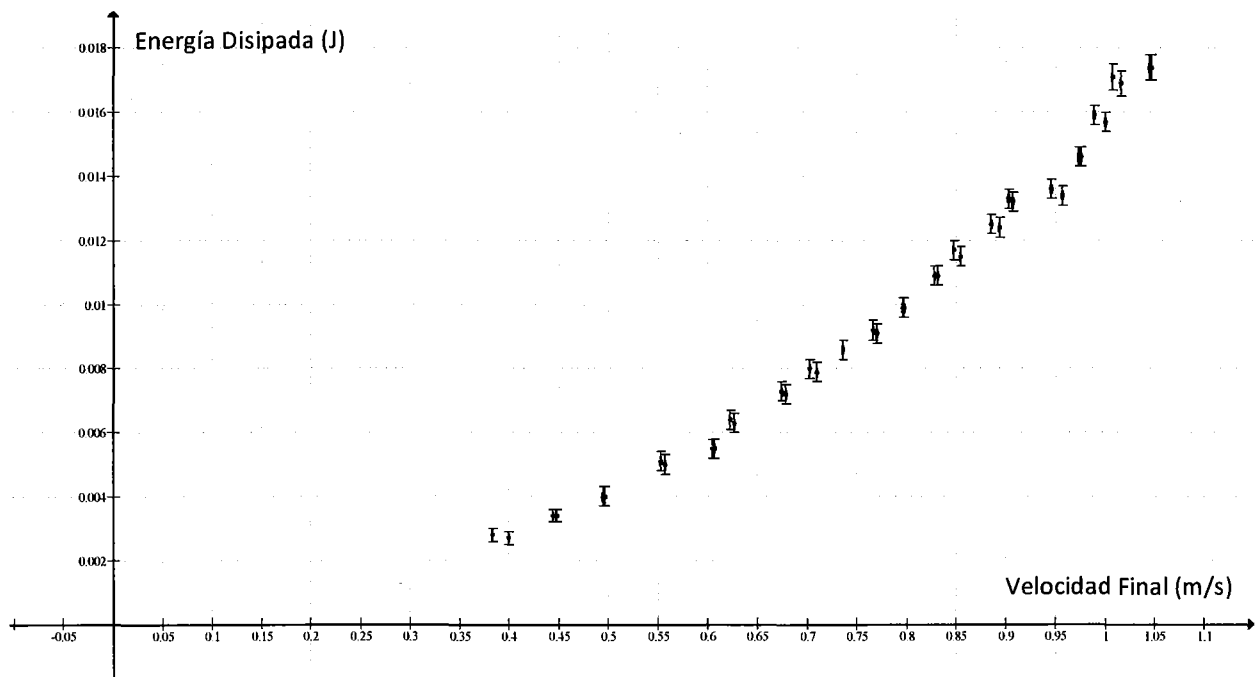
$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{h_r}{x}$$

Donde h_r es altura real y x es desplazamiento sobre el plano, que en todos los casos corresponde al valor de 0.7463 ± 0.0005 m. Basta entonces con despejar h_r :

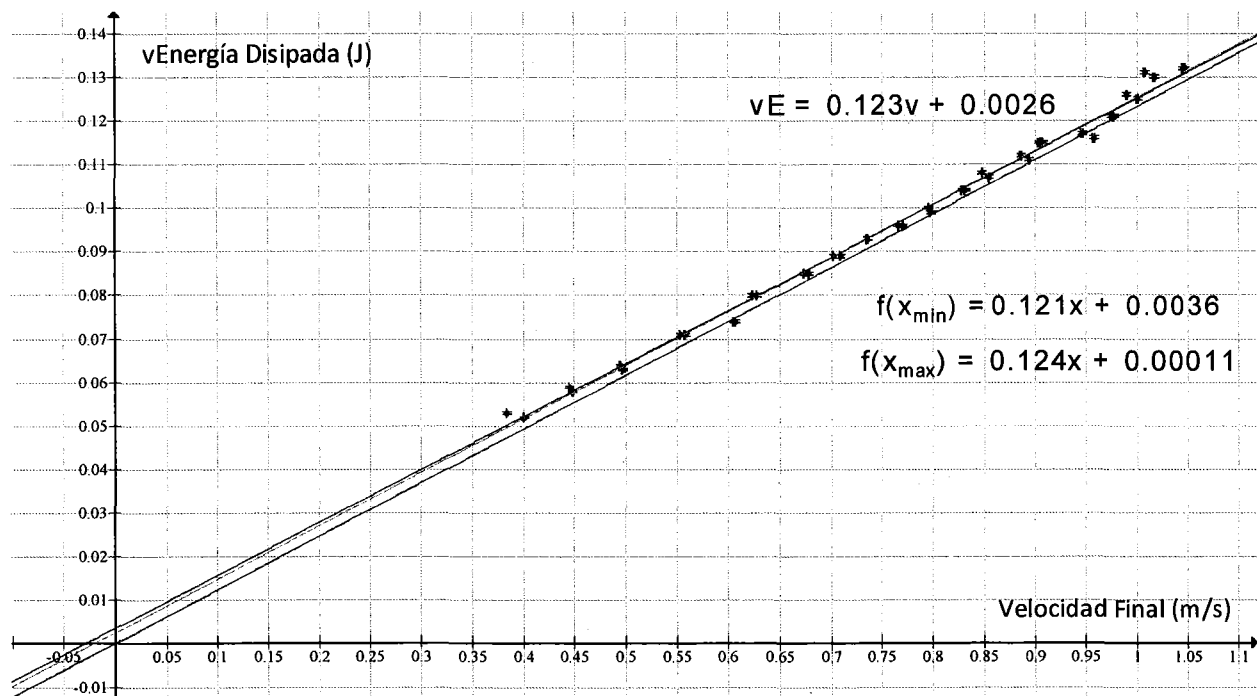
$$h_r = x \text{ sen } \theta$$

Los errores pertinentes a cada prueba también son mostrados y son calculados de la misma manera que en el experimento anterior: sumando incertidumbres absolutas en sumas o restas e incertidumbres relativas en multiplicaciones o divisiones.

²⁰ Tippens, Paul E. "Física, conceptos y aplicaciones" McGraw Hill. México. 2001. p.24.



La interdependencia de variables es evidente. Parece ser que la relación es de energía disipada directamente proporcional al cuadrado de la velocidad. Para comprobar esto se linealiza la curva expresando los valores del eje Y como raíces cuadradas de los valores originales:



Con esta gráfica se puede determinar la relación entre la energía disipada y la velocidad final:

$$\sqrt{Ed} = 0.123vf$$

Que sería el equivalente a:

$$Ed = 0.151 vf^2$$

Y al utilizar esta fórmula para el cálculo de gravedad se despeja que:

$$Ed = mgh_r - \frac{mvf^2}{2} = 0.151 vf^2$$

$$mgh_r = \frac{mvf^2}{2} + 0.151 vf^2$$

Se elimina la masa de dos de los términos, pero en el de energía disipada se implementa:

$$gh_r = \frac{vf^2}{2} + \frac{0.151 vf^2}{m}$$

Se despeja entonces la gravedad y se supe el valor de velocidad final en términos de desplazamiento y tiempo de desplazamiento:

$$g = \frac{2x^2}{h_r t^2} + \frac{0.151 x^2}{h_r m t^2}$$

Con esta nueva fórmula se recalculan los valores de gravedad. Los resultados de los cálculos pertinentes se incluyen en la **TABLA 4** del apéndice. Sus respectivos errores se encuentran en las **TABLAS 5 y 6²¹**. El promedio de los datos de gravedad calculada es:

$$g = 9.8 \pm 0.3 \frac{m}{s^2}$$

Al igual que en el caso anterior, el promedio de los valores de gravedad calculada se aproxima mucho al valor real de la gravedad. Sin embargo, para probar esta fórmula habrá que utilizarla bajo diferentes condiciones. Cambiará ahora también la masa:

Los valores medidos de la prueba son los siguientes:

$$h_r: 0.113 \pm 0.001 \text{ m}$$

$$t: 1.7284 \pm 0.0001s$$

$$x: 0.7463 \pm 0.0005 \text{ m}$$

$$m: 0.01424 \pm 0.00005 \text{ kg}$$

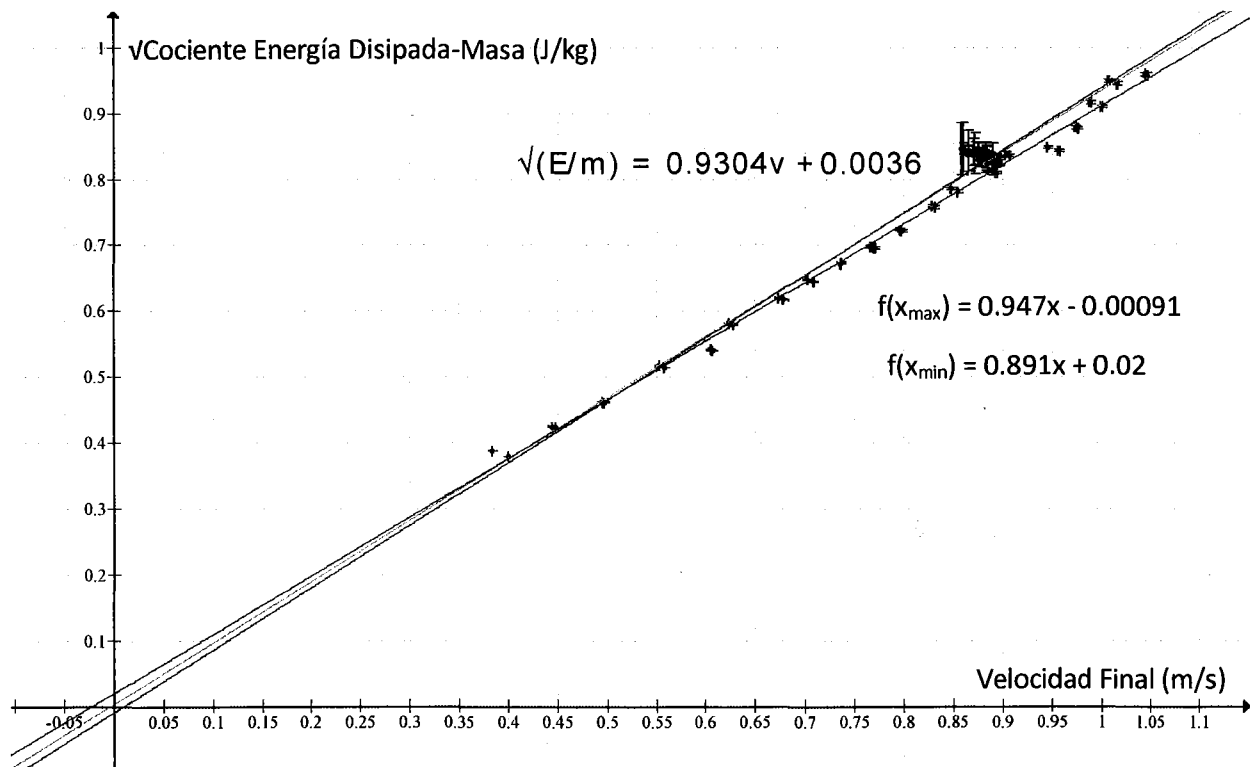
²¹ Ver apéndice.

$$g = \frac{2(0.7463)^2}{(0.113)(1.7284)^2} + \frac{0.151 (0.7463)^2}{(0.113)(0.0142)(1.7284)^2} = 20.84 \frac{m}{s^2}$$

Esta fórmula tampoco parece ser correcta. Se tendrá que buscar rediseñar para que funcione con diferentes alturas y masas.

Discusión y extrapolación

Ninguna de las fórmulas funcionaba para todos los casos. El problema de la primera fórmula fue que no tomaba en cuenta la dependencia de directa de energía disipada y el cuadrado de la velocidad final; el problema de la segunda fue con la masa. Se pensó entonces que para resolver el problema, en los gráficos realizados se tienen que incluir tres variables: masa, velocidad final y energía disipada. Se escogió graficarlo siguiente: en el eje X las velocidades finales; en el eje Y, la raíz cuadrada del cociente energía-masa con tal de introducir las tres variables en una gráfica, anular la proporcionalidad directa de la masa en la energía disipada y anular la relación con el cuadrado de la velocidad. A continuación la gráfica²²:



De la ecuación de la recta se puede sacar la siguiente fórmula:

$$\sqrt{\frac{E_d}{m}} = 0.93vf$$

Por lo que se puede concluir que:

²² En esta gráfica se incluyen los valores de todas las pruebas realizadas. Los datos utilizados se incluyen en el apéndice.

$$E_d = 0.86 m v f^2$$

Y a partir de esto obtener una fórmula para el cálculo de la gravedad:

$$E_d = mgh_r - \frac{mvf^2}{2} = 0.86 m v f^2$$

$$mgh_r = \frac{mvf^2}{2} + 0.86 m v f^2$$

$$gh_r = 1.35vf^2$$

$$g = \frac{1.35vf^2}{h_r}$$

Donde g es gravedad, x es desplazamiento sobre el plano, h_r es altura real, t es tiempo de desplazamiento, m es masa, E_d es energía disipada y vf es velocidad final.

Con esta nueva fórmula se recalculan los valores de gravedad para todas las pruebas. El promedio de los valores calculados es de:

$$9.6 \pm 0.3 \frac{m}{s^2}$$

Por último, para comprobar su certeza, se realiza una prueba bajo diferentes condiciones y emplea la fórmula de cálculo de gravedad. Se cambio el material del plano y utilizo una esfera diferente. Los datos procesados son los siguientes:

$$vf = 2.2988 \pm 0.0006 \text{ m/s}$$

$$h_r = 0.7479 \pm 0.005 \text{ m}$$

$$g = \frac{1.35(2.2988)^2}{0.7479} = 9.5 \frac{m}{s^2}$$

La fórmula se acepta como correcta.

Conclusión

Con respecto a la pregunta de investigación, sí se puede obtener de forma experimental una fórmula de cálculo de la disipación de energía estudiando la aceleración gravitatoria en esferas que ruedan sobre un plano inclinado. La fórmula final quedo con tal:

$$E_d = 0.86 m v f^2$$

Comprobada con los datos medidos mediante la fórmula de aceleración gravitatoria:

$$g = \frac{1.35 v f^2}{h_r}$$

Si se diera una valoración global de la investigación y sus resultados se diría que fue un buen proyecto, sin embargo, de tener mayor disponibilidad de recursos²³ que se podrían cambia algunas cosas: No fueron estudiados ángulos mayores a los 15° con tal de controlar los efectos de deslizamiento que podría haber con ángulos mayores. Otros factores que no se estudiaron para la determinación de la fórmula final fueron el efecto del la fricción en el estudio y la deformación elástica de los materiales, aparte de que se considero que los objetos eran esferas perfectas. Controlar o estudiar estos factores no estaba al alcance del proyecto En los experimentos, el método de cálculo de volumen era muy impreciso, no sólo por que las incertidumbres eran grandes en relación a las magnitudes medidas, sino que por efectos de capilaridad era difícil determinar el nivel del agua. No se pudo estudiar bien el efecto del volumen sobre la energía disipada, principalmente porque no se tuvieron los materiales con las densidades necesarias para ello. Por último, pudo haber errores sistemáticos en el estudio provocados por factores como el encorvamiento del plano.

Resulta difícil explicar por qué la fórmula obtenida pareciera no coincidir con las fórmulas tradicionales de conservación de energía y, aunque sería complicado fundamentar con datos concretos por que se dio esto (a qué tipo de energía se convirtió la energía disipada) se puede decir que es porque solo una pequeña parte se tradujo a velocidad.

Es importante resaltar que para la obtención de la fórmula de disipación de energía fue tan importante el fundamento teórico como el práctico. Se resalta la importancia de la investigación haciendo énfasis en que, aunque parece ser que debido a las enormes aproximaciones en la física teórica no es adecuado pensar en el empleo de principios físicos en el mundo real, esto no es cierto. Se podría pensar que la ley de la conservación de la energía mecánica no sería muy adaptable a la realidad debido a que considera que no se pierde o gana energía para sus cálculos. Sin embargo, la disipación de energía es cuantificable y el principio de conservación se puede emplear bajo ciertas condiciones controladas.

²³ Recursos como mayor cantidad de palabras en el trabajo o más amplia disponibilidad de materiales sin necesidad de un alto presupuesto.

Bibliografía

- Feynman, Richard; Leighton, Robert; Sands, Matthew. *"The Feynman Lectures on Physics"*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1977.
- Peterson, John C. *"Matemáticas básicas"* Grupo editorial Patria. México. 2009.
- Tiplens, Paul E. *"Física, conceptos y aplicaciones"* McGraw Hill. México. 2001.

Palabras: 3983

Apéndice

Experimento 1

TABLA 1

#	Volumen (m ³)	Masa (kg)	Tiempo (s)	Energía Inicial (J)	Velocidad Final (m/s)	Energía Final (J)	Energía Disipada (J)	Razón ²⁴ (J/kg)	Gravedad calculada (m/s ²)	Densidad (kg/m ³)
1	0.0000010	0.00558	1.6884	0.00605	0.8840	0.00218	0.00387	0.69	9.77	5580
2	0.0000010	0.00558	1.7141	0.00605	0.8708	0.00212	0.00394	0.71	9.67	5580
3	0.0000011	0.00482	1.6774	0.00523	0.8898	0.00191	0.00332	0.69	9.82	4382
4	0.0000011	0.00482	1.6892	0.00523	0.8836	0.00188	0.00335	0.69	9.77	4382
5	0.0000012	0.00367	1.7112	0.00398	0.8723	0.00140	0.00258	0.70	9.68	3058
6	0.0000012	0.00367	1.7232	0.00398	0.8662	0.00138	0.00260	0.71	9.63	3058
7	0.0000014	0.00283	1.7353	0.00307	0.8601	0.00105	0.00202	0.71	9.58	2021
8	0.0000014	0.00283	1.7395	0.00307	0.8581	0.00104	0.00203	0.72	9.57	2021
9	0.0000015	0.00656	1.7023	0.00711	0.8768	0.00252	0.00459	0.70	9.72	4373
10	0.0000015	0.00656	1.7035	0.00711	0.8762	0.00252	0.00460	0.70	9.71	4373
11	0.0000015	0.00656	1.7105	0.00711	0.8726	0.00250	0.00462	0.70	9.68	4373
12	0.0000016	0.01379	1.6902	0.01495	0.8831	0.00538	0.00958	0.69	9.77	8619
13	0.0000016	0.01379	1.7007	0.01495	0.8776	0.00531	0.00964	0.70	9.72	8619
14	0.0000020	0.00692	1.688	0.00750	0.8842	0.00271	0.00480	0.69	9.77	3460
15	0.0000020	0.00692	1.6902	0.00750	0.8831	0.00270	0.00481	0.69	9.77	3460
16	0.0000039	0.01463	1.7213	0.01586	0.8671	0.00550	0.01036	0.71	9.64	3751
17	0.0000039	0.01463	1.7364	0.01586	0.8596	0.00541	0.01046	0.71	9.58	3751
18	0.0000043	0.01331	1.6708	0.01443	0.8933	0.00531	0.00912	0.69	9.85	3095
19	0.0000043	0.01331	1.6927	0.01443	0.8818	0.00517	0.00926	0.70	9.76	3095
20	0.0000052	0.01461	1.6769	0.01584	0.8901	0.00579	0.01006	0.69	9.82	2810
21	0.0000052	0.01461	1.6823	0.01584	0.8872	0.00575	0.01009	0.69	9.80	2810
22	0.0000056	0.01382	1.6829	0.01499	0.8869	0.00544	0.00955	0.69	9.80	2468
23	0.0000056	0.01382	1.7044	0.01499	0.8757	0.00530	0.00969	0.70	9.71	2468
24	0.0000061	0.01329	1.7009	0.01441	0.8775	0.00512	0.00929	0.70	9.72	2179
25	0.0000061	0.01329	1.707	0.01441	0.8744	0.00508	0.00933	0.70	9.70	2179
26	0.0000061	0.01832	1.6874	0.01987	0.8846	0.00717	0.01270	0.69	9.78	3003
27	0.0000061	0.01832	1.6904	0.01987	0.8830	0.00714	0.01272	0.69	9.76	3003
28	0.0000061	0.01881	1.6691	0.02040	0.8943	0.00752	0.01288	0.68	9.86	3084
29	0.0000061	0.01881	1.6741	0.02040	0.8916	0.00748	0.01292	0.69	9.83	3084

²⁴ La razón a la que se hace referencia en esta columna es la de dividir energía disipada entre masa calculada. Es el valor que representa la pendiente de la recta al graficar estos valores.

#	Volumen (m ³)	Masa (kg)	Tiempo (s)	Energía Inicial (J)	Velocidad Final (m/s)	Energía Final (J)	Energía Disipada (J)	Razón ²⁴ (J/kg)	Gravedad calculada (m/s ²)	Densidad (kg/m ³)
30	0.0000066	0.01992	1.678	0.02160	0.8895	0.00788	0.01372	0.69	9.82	3018
31	0.0000066	0.01992	1.6806	0.02160	0.8881	0.00786	0.01375	0.69	9.81	3018
32	0.0000069	0.02023	1.6884	0.02194	0.8840	0.00791	0.01403	0.69	9.77	2932
33	0.0000069	0.02023	1.724	0.02194	0.8658	0.00758	0.01436	0.71	9.63	2932
34	0.0000069	0.02089	1.6649	0.02265	0.8965	0.00839	0.01426	0.68	9.87	3028
35	0.0000069	0.02089	1.6728	0.02265	0.8923	0.00832	0.01434	0.69	9.84	3028
36	0.0000074	0.01926	1.6781	0.02089	0.8895	0.00762	0.01327	0.69	9.82	2603
37	0.0000074	0.01926	1.6888	0.02089	0.8838	0.00752	0.01336	0.69	9.77	2603
38	0.0000078	0.01894	1.6681	0.02054	0.8948	0.00758	0.01296	0.68	9.86	2428
39	0.0000078	0.01894	1.6696	0.02054	0.8940	0.00757	0.01297	0.68	9.85	2428
40	0.0000120	0.03605	1.6873	0.03909	0.8846	0.01411	0.02499	0.69	9.78	3004
41	0.0000120	0.03605	1.6946	0.03909	0.8808	0.01398	0.02511	0.70	9.75	3004
42	0.0000210	0.05749	1.69	0.06234	0.8832	0.02242	0.03992	0.69	9.77	2738
43	0.0000210	0.05749	1.7144	0.06234	0.8706	0.02179	0.04055	0.71	9.67	2738
44	0.0000320	0.02412	1.6906	0.02616	0.8829	0.00940	0.01676	0.69	9.76	754
45	0.0000320	0.02412	1.7339	0.02616	0.8608	0.00894	0.01722	0.71	9.59	754
46	0.0000380	0.04878	1.6794	0.05290	0.8888	0.01927	0.03363	0.69	9.81	1284
47	0.0000380	0.04878	1.7016	0.05290	0.8772	0.01877	0.03413	0.70	9.72	1284
48	0.0001370	0.01922	1.6846	0.02084	0.8860	0.00754	0.01330	0.69	9.79	140
49	0.0001370	0.01922	1.6987	0.02084	0.8787	0.00742	0.01342	0.70	9.73	140
50	0.0001420	0.07394	1.6634	0.08018	0.8973	0.02977	0.05041	0.68	9.88	521
51	0.0001420	0.07394	1.6881	0.08018	0.8842	0.02890	0.05128	0.69	9.77	521
52	0.0001530	0.06342	1.6783	0.06877	0.8894	0.02508	0.04369	0.69	9.82	415
53	0.0001530	0.06342	1.6857	0.06877	0.8854	0.02486	0.04391	0.69	9.78	415
54	0.0002130	0.14237	1.6711	0.15439	0.8932	0.05679	0.09760	0.69	9.85	668
55	0.0002130	0.14237	1.6854	0.15439	0.8856	0.05583	0.09856	0.69	9.79	668

TABLA 2

#	Masa (kg)	δ Volumen	δ Masa	δ Tiempo	δ Energía Inicial	δ Velocidad Final	δ Energía Final	δ Energía Disipada	δ Aceleración	δ Densidad
1	0.00558	0.5	0.009	0.00006	0.010	0.0007	0.01	0.021	0.006	0.5
2	0.00558	0.5	0.009	0.00006	0.010	0.0007	0.01	0.020	0.006	0.5
3	0.00482	0.5	0.01	0.00006	0.010	0.0007	0.01	0.024	0.006	0.5
4	0.00482	0.5	0.01	0.00006	0.010	0.0007	0.01	0.024	0.006	0.5
5	0.00367	0.4	0.01	0.00006	0.010	0.0007	0.02	0.030	0.006	0.4
6	0.00367	0.4	0.01	0.00006	0.010	0.0007	0.02	0.030	0.006	0.4

#	Masa (kg)	δ Volumen	δ Masa	δ Tiempo	δ Energía Inicial	δ Velocidad Final	δ Energía Final	δ Energía Disipada	δ Aceleración	δ Densidad
7	0.00283	0.4	0.02	0.00006	0.02	0.0007	0.02	0.038	0.006	0.4
8	0.00283	0.4	0.02	0.00006	0.02	0.0007	0.02	0.038	0.006	0.4
9	0.00656	0.3	0.008	0.00006	0.008	0.0007	0.01	0.018	0.006	0.3
10	0.00656	0.3	0.008	0.00006	0.008	0.0007	0.01	0.018	0.006	0.3
11	0.00656	0.3	0.008	0.00006	0.008	0.0007	0.01	0.018	0.006	0.3
12	0.01379	0.3	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.3
13	0.01379	0.3	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.009	0.006	0.3
14	0.00692	0.3	0.007	0.00006	0.008	0.0007	0.01	0.017	0.006	0.3
15	0.00692	0.3	0.007	0.00006	0.008	0.0007	0.01	0.017	0.006	0.3
16	0.01463	0.1	0.003	0.00006	0.004	0.0007	0.00	0.009	0.006	0.1
17	0.01463	0.1	0.003	0.00006	0.004	0.0007	0.00	0.009	0.006	0.1
18	0.01331	0.1	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.1
19	0.01331	0.1	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.1
20	0.01461	0.09	0.003	0.00006	0.004	0.0007	0.00	0.009	0.006	0.09
21	0.01461	0.09	0.003	0.00006	0.004	0.0007	0.00	0.009	0.006	0.09
22	0.01382	0.09	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.09
23	0.01382	0.09	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.009	0.006	0.09
24	0.01329	0.08	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.09
25	0.01329	0.08	0.004	0.00006	0.004	0.0007	0.01	0.010	0.006	0.09
26	0.01832	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.08
27	0.01832	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.08
28	0.01881	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.08
29	0.01881	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.08
30	0.01992	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.08
31	0.01992	0.08	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.08
32	0.02023	0.07	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
33	0.02023	0.07	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
34	0.02089	0.07	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
35	0.02089	0.07	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
36	0.01926	0.07	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
37	0.01926	0.07	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.07
38	0.01894	0.06	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.07
39	0.01894	0.06	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.008	0.006	0.07
40	0.03605	0.08	0.001	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.005	0.006	0.08
41	0.03605	0.08	0.001	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.005	0.006	0.08
42	0.05749	0.05	0.0009	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.05
43	0.05749	0.05	0.0009	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.05
44	0.02412	0.03	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.006	0.006	0.03
45	0.02412	0.03	0.002	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.006	0.006	0.03

#	Masa (kg)	δ Volumen	δ Masa	δ Tiempo	δ Energía Inicial	δ Velocidad Final	δ Energía Final	δ Energía Disipada	δ Aceleración	δ Densidad
46	0.04878	0.03	0.001	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.03
47	0.04878	0.03	0.001	0.00006	0.002	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.03
48	0.01922	0.09	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.09
49	0.01922	0.09	0.003	0.00006	0.003	0.0007	0.00	0.007	0.006	0.09
50	0.07394	0.08	0.0007	0.00006	0.0013	0.0007	0.00	0.003	0.006	0.09
51	0.07394	0.08	0.0007	0.00006	0.0013	0.0007	0.00	0.003	0.006	0.09
52	0.06342	0.08	0.0008	0.00006	0.0015	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.08
53	0.06342	0.08	0.0008	0.00006	0.0015	0.0007	0.00	0.004	0.006	0.08
54	0.14237	0.06	0.0004	0.00006	0.0010	0.0007	0.00	0.003	0.006	0.06
55	0.14237	0.06	0.0004	0.00006	0.0010	0.0007	0.00	0.003	0.006	0.06

TABLA 3

#	Masa (kg)	Δ Volumen (m ³)	Δ Masa (kg)	Δ Tiempo (s)	Δ Energía Inicial (J)	Δ Velocidad (m/s)	Δ Energía Final (J)	Δ Energía Disipada (J)	Δ Aceleración (m/s ²)	Δ Densidad (kg/m ³)
1	0.00558	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	2840
2	0.00558	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.0001	0.06	2840
3	0.00482	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	2037
4	0.00482	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	2037
5	0.00367	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	1316
6	0.00367	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	1316
7	0.00283	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	758
8	0.00283	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	758
9	0.00656	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	1491
10	0.00656	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	1491
11	0.00656	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	1491
12	0.01379	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	2725
13	0.01379	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	2725
14	0.00692	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	890
15	0.00692	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00002	0.00008	0.06	890
16	0.01463	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	494
17	0.01463	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	494
18	0.01331	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0007	0.00003	0.00009	0.06	372
19	0.01331	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	372
20	0.01461	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	262
21	0.01461	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	262

#	Masa (kg)	Δ Volumen (m ³)	Δ Masa (kg)	Δ Tiempo (s)	Δ Energía Inicial (J)	Δ Velocidad (m/s)	Δ Energía Final (J)	Δ Energía Disipada (J)	Δ Aceleración (m/s ²)	Δ Densidad (kg/m ³)
22	0.01382	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	229
23	0.01382	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	229
24	0.01329	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	187
25	0.01329	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00006	0.0006	0.00003	0.00009	0.06	187
26	0.01832	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	254
27	0.01832	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	254
28	0.01881	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	261
29	0.01881	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	261
30	0.01992	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	236
31	0.01992	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	236
32	0.02023	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	220
33	0.02023	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	220
34	0.02089	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	227
35	0.02089	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	227
36	0.01926	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	183
37	0.01926	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	183
38	0.01894	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	162
39	0.01894	0.0000005	0.00005	0.0001	0.00007	0.0007	0.00003	0.00010	0.06	162
40	0.03605	0.000001	0.00005	0.0001	0.00008	0.0006	0.00004	0.00010	0.06	255
41	0.03605	0.000001	0.00005	0.0001	0.00008	0.0006	0.00004	0.00010	0.06	255
42	0.05749	0.000001	0.00005	0.0001	0.00010	0.0006	0.00010	0.00010	0.06	133
43	0.05749	0.000001	0.00005	0.0001	0.00010	0.0006	0.00010	0.00010	0.06	133
44	0.02412	0.000001	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	25
45	0.02412	0.000001	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	25
46	0.04878	0.000001	0.00005	0.0001	0.00009	0.0006	0.00001	0.00010	0.06	35
47	0.04878	0.000001	0.00005	0.0001	0.00009	0.0006	0.00005	0.00010	0.06	35
48	0.01922	0.000012	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	13
49	0.01922	0.000012	0.00005	0.0001	0.00007	0.0006	0.00003	0.00010	0.06	13
50	0.07394	0.000012	0.00005	0.0001	0.00011	0.0007	0.0001	0.0002	0.06	44
51	0.07394	0.000012	0.00005	0.0001	0.00011	0.0006	0.0001	0.0002	0.06	44
52	0.06342	0.000012	0.00005	0.0001	0.00010	0.0006	0.0001	0.0002	0.06	33
53	0.06342	0.000012	0.00005	0.0001	0.00010	0.0006	0.0001	0.0002	0.06	33
54	0.14237	0.000012	0.00005	0.0001	0.00016	0.0007	0.0001	0.0003	0.06	38
55	0.14237	0.000012	0.00005	0.0001	0.00016	0.0006	0.0001	0.0003	0.00	38

Experimento 2

TABLA 4

#	Tiempo (s)	Altura (m)	Seno θ	Altura Real (m)	Energía Inicial (J)	Velocidad Final (m/s)	Energía Final (J)	Energía Disipada (J)	Razón ²⁵ (J/kg)	Gravedad Calculada (m/s ²)
1	3.7295	0.096	0.031	0.023	0.0042	0.4002	0.001517	0.0027	0.1438	9.790
2	3.8952	0.096	0.031	0.023	0.0042	0.3832	0.001391	0.0028	0.1505	9.498
3	3.3569	0.120	0.038	0.029	0.0053	0.4446	0.001872	0.0034	0.1810	9.705
4	3.3321	0.120	0.038	0.029	0.0053	0.4479	0.001900	0.0034	0.1795	9.757
5	3.0180	0.144	0.046	0.034	0.0064	0.4946	0.002316	0.0040	0.2135	9.785
6	3.0060	0.144	0.046	0.034	0.0064	0.4965	0.002335	0.0040	0.2125	9.814
7	2.6990	0.180	0.057	0.043	0.0080	0.5530	0.002896	0.0051	0.2669	9.759
8	2.6751	0.180	0.057	0.043	0.0080	0.5580	0.002948	0.0050	0.2641	9.823
9	2.4651	0.204	0.065	0.049	0.0090	0.6055	0.003472	0.0055	0.2924	9.953
10	2.4587	0.204	0.065	0.049	0.0090	0.6071	0.003490	0.0055	0.2915	9.972
11	2.3956	0.228	0.073	0.054	0.0101	0.6231	0.003676	0.0064	0.3376	9.744
12	2.3785	0.228	0.073	0.054	0.0101	0.6275	0.003729	0.0063	0.3348	9.795
13	2.2145	0.262	0.083	0.062	0.0116	0.6740	0.004302	0.0073	0.3839	9.798
14	2.2010	0.262	0.083	0.062	0.0116	0.6781	0.004355	0.0072	0.3811	9.843
15	2.1260	0.286	0.091	0.068	0.0126	0.7021	0.004668	0.0080	0.4205	9.770
16	2.1046	0.286	0.091	0.068	0.0126	0.7092	0.004763	0.0079	0.4155	9.844
17	2.0295	0.310	0.099	0.074	0.0137	0.7355	0.005122	0.0086	0.4525	9.810
18	2.0284	0.310	0.099	0.074	0.0137	0.7359	0.005128	0.0086	0.4522	9.814
19	1.9485	0.334	0.106	0.079	0.0148	0.7660	0.005557	0.0092	0.4855	9.830
20	1.9387	0.334	0.106	0.079	0.0148	0.7699	0.005613	0.0091	0.4825	9.868
21	1.8754	0.360	0.115	0.086	0.0159	0.7959	0.005999	0.0099	0.523	9.832
22	1.8716	0.360	0.115	0.086	0.0159	0.7975	0.006023	0.0099	0.522	9.847
23	1.8012	0.394	0.126	0.094	0.0174	0.8287	0.006503	0.0109	0.575	9.792
24	1.7948	0.394	0.126	0.094	0.0174	0.8316	0.006549	0.0109	0.573	9.818
25	1.7614	0.418	0.133	0.099	0.0185	0.8474	0.006800	0.0117	0.616	9.737
26	1.7469	0.418	0.133	0.099	0.0185	0.8544	0.006914	0.0115	0.610	9.797
27	1.6859	0.452	0.144	0.107	0.0200	0.8853	0.007423	0.0125	0.662	9.767
28	1.6702	0.452	0.144	0.107	0.0200	0.8937	0.007563	0.0124	0.655	9.836
29	1.6522	0.476	0.152	0.113	0.0210	0.9034	0.007729	0.0133	0.702	9.724
30	1.6453	0.476	0.152	0.113	0.0210	0.9072	0.007794	0.0132	0.699	9.754
31	1.5784	0.500	0.159	0.119	0.0221	0.9456	0.008468	0.0136	0.719	9.877
32	1.5598	0.500	0.159	0.119	0.0221	0.9569	0.008672	0.0134	0.708	9.968
33	1.5326	0.534	0.170	0.127	0.0236	0.9739	0.008982	0.0146	0.771	9.849

²⁵ Esta razón hace referencia al cociente de dividir el valor de energía disipada sobre masa.

#	Tiempo (s)	Altura (m)	Seno θ	Altura Real (m)	Energía Inicial (J)	Velocidad Final (m/s)	Energía Final (J)	Energía Disipada (J)	Razón ²⁵ (J/kg)	Gravedad Calculada (m/s ²)
34	1.5285	0.534	0.170	0.127	0.0236	0.9765	0.009030	0.0146	0.769	9.869
35	1.5087	0.570	0.182	0.136	0.0252	0.9893	0.009269	0.0159	0.840	9.723
36	1.4921	0.570	0.182	0.136	0.0252	1.0003	0.009476	0.0157	0.829	9.803
37	1.4822	0.604	0.192	0.144	0.0267	1.0070	0.009603	0.0171	0.902	9.640
38	1.4689	0.604	0.192	0.144	0.0267	1.0161	0.009778	0.0169	0.892	9.705
39	1.4291	0.628	0.200	0.149	0.0277	1.0444	0.010330	0.0174	0.919	9.761
40	1.4266	0.628	0.200	0.149	0.0277	1.0463	0.010367	0.0174	0.917	9.774

TABLA 5

#	δ Tiempo	δ Altura	δ Seno θ	δ Altura Real	δ Energía Inicial	δ Velocidad Final	δ Energía Final	δ Energía Disipada	δ Razón	δ Gravedad Calculada
1	0.00003	0.05	0.05	0.05	0.06	0.0007	0.004	0.09	0.003	0.09
2	0.00003	0.05	0.05	0.05	0.06	0.0007	0.004	0.08	0.003	0.09
3	0.00003	0.04	0.04	0.04	0.05	0.0007	0.004	0.07	0.003	0.07
4	0.00003	0.04	0.04	0.04	0.05	0.0007	0.004	0.07	0.003	0.07
5	0.00003	0.03	0.03	0.04	0.04	0.0007	0.004	0.06	0.003	0.06
6	0.00003	0.03	0.03	0.04	0.04	0.0007	0.004	0.06	0.003	0.06
7	0.00004	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0007	0.004	0.05	0.003	0.05
8	0.00004	0.03	0.03	0.03	0.03	0.0007	0.004	0.05	0.003	0.05
9	0.00004	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0008	0.004	0.05	0.003	0.04
10	0.00004	0.02	0.02	0.03	0.03	0.0008	0.004	0.05	0.003	0.04
11	0.00004	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.04
12	0.00004	0.02	0.02	0.02	0.03	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.04
13	0.00005	0.019	0.019	0.02	0.02	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.03
14	0.00005	0.019	0.019	0.02	0.02	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.03
15	0.00005	0.017	0.018	0.018	0.02	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.03
16	0.00005	0.017	0.018	0.018	0.02	0.0008	0.004	0.04	0.003	0.03
17	0.00005	0.016	0.016	0.017	0.02	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.03
18	0.00005	0.016	0.016	0.017	0.02	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.03
19	0.00005	0.015	0.015	0.016	0.018	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.03
20	0.00005	0.015	0.015	0.016	0.018	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.03
21	0.00005	0.014	0.014	0.015	0.017	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02
22	0.00005	0.014	0.014	0.015	0.017	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02
23	0.00006	0.013	0.013	0.014	0.016	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02
24	0.00006	0.013	0.013	0.014	0.016	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02
25	0.00006	0.012	0.012	0.013	0.015	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02

#	δ Tiempo	δ Altura	δ Seno θ	δ Altura Real	δ Energía Inicial	δ Velocidad Final	δ Energía Final	δ Energía Disipada	δ Razón	δ Gravedad Calculada
26	0.00006	0.012	0.012	0.013	0.015	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.02
27	0.00006	0.011	0.011	0.012	0.015	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.019
28	0.00006	0.011	0.011	0.012	0.015	0.0008	0.004	0.03	0.003	0.019
29	0.00006	0.011	0.011	0.011	0.014	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.018
30	0.00006	0.011	0.011	0.011	0.014	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.018
31	0.00006	0.010	0.010	0.011	0.013	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.018
32	0.00006	0.010	0.010	0.011	0.013	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.018
33	0.00007	0.009	0.010	0.010	0.013	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.017
34	0.00007	0.009	0.010	0.010	0.013	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.017
35	0.00007	0.009	0.009	0.010	0.012	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.016
36	0.00007	0.009	0.009	0.010	0.012	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.016
37	0.00007	0.008	0.008	0.009	0.012	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.015
38	0.00007	0.008	0.008	0.009	0.012	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.015
39	0.00007	0.008	0.008	0.009	0.011	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.014
40	0.00007	0.008	0.008	0.009	0.011	0.0008	0.004	0.02	0.003	0.014

TABLA 6

#	Δ Tiempo (s)	Δ Altura (m)	Δ Seno θ	Δ Altura Real (m)	Δ Energía Inicial (J)	Δ Velocidad Final (m/s)	Δ Energía Final (J)	Δ Energía Disipada (J)	Δ Razón (J/kg)	Δ Gravedad Calculada (m/s ²)
1	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0003	0.000006	0.0002	0.0004	0.009
2	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0003	0.000006	0.0002	0.0004	0.009
3	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0003	0.000008	0.0002	0.0005	0.007
4	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0003	0.000008	0.0002	0.0005	0.007
5	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0004	0.000010	0.0003	0.0006	0.006
6	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0004	0.000010	0.0003	0.0006	0.006
7	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0004	0.000012	0.0003	0.0008	0.005
8	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0002	0.0004	0.000012	0.0003	0.0008	0.005
9	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000014	0.0003	0.0009	0.004
10	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000014	0.0003	0.0008	0.004
11	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000015	0.0003	0.0010	0.004
12	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000015	0.0003	0.0010	0.004
13	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000018	0.0003	0.0011	0.003
14	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000018	0.0003	0.0011	0.003
15	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.000019	0.0003	0.0012	0.003
16	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0005	0.00002	0.0003	0.0012	0.003

#	Δ Tiempo (s)	Δ Altura (m)	Δ Seno θ	Δ Altura Real (m)	Δ Energía Inicial (J)	Δ Velocidad Final (m/s)	Δ Energía Final (J)	Δ Energía Disipada (J)	Δ Razón (J/kg)	Δ Gravedad Calculada (m/s ²)
17	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00002	0.0003	0.0013	0.003
18	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00002	0.0003	0.0013	0.003
19	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00002	0.0003	0.0014	0.003
20	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00002	0.0003	0.0014	0.003
21	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00003	0.0003	0.002	0.002
22	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00003	0.0003	0.002	0.002
23	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00003	0.0003	0.002	0.002
24	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0006	0.00003	0.0003	0.002	0.002
25	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
26	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
27	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
28	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
29	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
30	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0007	0.00003	0.0003	0.002	0.002
31	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.002	0.002
32	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.002	0.002
33	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.002	0.002
34	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.002	0.002
35	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.003	0.002
36	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0003	0.002	0.002
37	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0004	0.003	0.002
38	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0004	0.003	0.002
39	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0004	0.003	0.0015
40	0.0001	0.005	0.002	0.001	0.0003	0.0008	0.00004	0.0004	0.003	0.0015