Bachillerato Internacional

Portada de la Monografía

Los alumnos deben llenar esta hoja y entregarla al supervisor junto con la versión final de su monografía

Número de convocatoria del alumno

Nombre y apellido(s) del alumno

Número del colegio

Nombre del colegio

Convocatoria de exámenes (mayo o noviembre)	MAYO	Año	2012

Asignatura del Programa del Diploma en la que se ha inscrito la monografía: MATEMÁTICAS

(En el caso de una monografía en lenguas, señale si se trata del Grupo 1 o el Grupo 2.)

Título de la monografía: FUNCIONES CUYA RECTA TANGENTE FORME CON LOS EJES CARTESIANOS UN TRIÁNGULO DE ÁREA CONSTANTE

Declaración del alumno

El alumno debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no reciba una calificación final.

Confirmo que soy el autor de este trabajo y que no he recibido más ayuda que la permitida por el Bachillerato Internacional.

He citado debidamente las palabras, ideas o gráficos de otra persona, se hayan expresado estos de forma escrita, oral o visual.

Sé que el máximo de palabras permitido para las monografías es 4.000, y que a los examinadores no se les pide que lean monografías que superen ese límite.

Esta es la versión final de mi monografía.

Firma del alumno: ____ Fecha: 12/03/2012

Bachillerato Internacional, Peterson House
Malthouse Avenue, Cardiff Gate, Cardiff, CF23 8GL, REINO UNIDO

Informe y declaración del supervisor

El supervisor debe completar este informe, firmar la declaración y luego entregar esta portada junto con la versión final de la monografía al coordinador del Programa del Diploma.

Nombre y apellido(s) del supervisor [MAYÚSCULAS]: ____________

Si lo considera adecuado, escriba algunos comentarios sobre el contexto en que el alumno desarrolló la investigación, las dificultades que encontró y cómo las ha superado (ver página 13 de la guía para la monografía). La entrevista final con el alumno puede ofrecer información útil. Estos comentarios pueden ayudar al examinador a conceder un nivel de logro para el criterio K (valoración global). No escriba comentarios sobre circunstancias adversas personales que puedan haber afectado al alumno. En el caso en que el número de horas dedicadas a la discusión de la monografía con el alumno sea cero, debe explicarse este hecho indicando cómo se ha podido garantizar la autoría original del alumno. Puede adjuntar una hoja adicional si necesita más espacio para escribir sus comentarios.

El supervisor debe firmar esta declaración; de lo contrario, es posible que no se otorgue una calificación final.

He leído la versión final de la monografía, la cual será entregada al examinador.

A mi leal saber y entender, la monografía es el trabajo auténtico del alumno.

He dedicado [ ] horas a discutir con el alumno su progreso en la realización de la monografía.

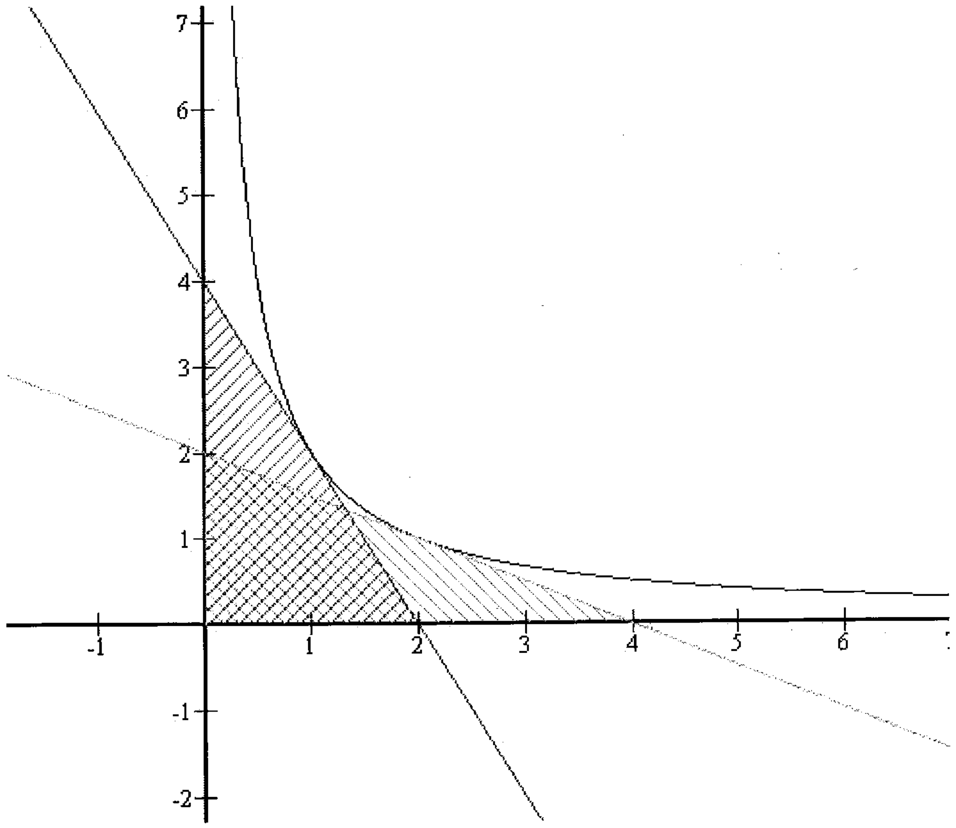
Firma del supervisor: ____________ Fecha: 12/03/2012

FUNCIONES CUYA RECTA TANGENTE FORME CON LOS EJES CARTESIANOS UN TRIÁNGULO DE ÁREA CONSTANTE

RESUMEN:

Este tema surgió en clase realizando un ejercicio que nos mandó el profesor en el que se pedía que hallláramos el área que formaba la tangente a la función $f(x)=\frac{2}{x}$ con los ejes del sistema de coordenadas cartesiano en un punto. A continuación se nos pidió que lo halláramos en otro punto distinto y el resultado fue el mismo. La posibilidad de que sucediese esta propiedad en todo el dominio me llevó a pensar cuáles serían las funciones que cumpliesen esta propiedad.

En esta monografía resolveré en primer lugar el problema original (primero para los puntos concretos y luego para un punto x = n siendo n un número cualquiera perteneciente a los números reales) y para finalizar resolveré el problema en el que buscaré todas las funciones que cumplan que su recta tangente a la función en cualquier punto forme con los ejes OX y OY un triángulo de área igual a 4 u^2, siendo el resultado de este problema las infinitas rectas que forman un área de 4 u^2 con los ejes además de la función inicial desde la cual partimos. El planteamiento general nos lleva a una ecuación diferencial lineal que tendremos que plantear y resolver.



ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN:

Como ya he indicado en el resumen, este tema surgió un día de clase en el que el profesor de matemáticas nos mandó realizar para casa un problema en el que se nos pedía que halláramos el valor del área del triángulo formado por la recta tangente a la función $f(x)=\frac{2}{x}$ en el punto x = 1. A continuación nos pedía que lo calculáramos en x = 2. Ante mi asombro el resultado era el mismo así que probé en x = 3 y en x = 4 dándome a su vez el mismo resultado. Acabé deduciendo que el área siempre es constante por lo que me pregunté cuáles podían ser el resto de funciones que cumplieran esta propiedad (si efectivamente hay alguna otra). Este, por lo tanto, me pareció un buen tema de la monografía ya que daba juego para indagar a fondo en las funciones y a seguir aprendiendo cosas.

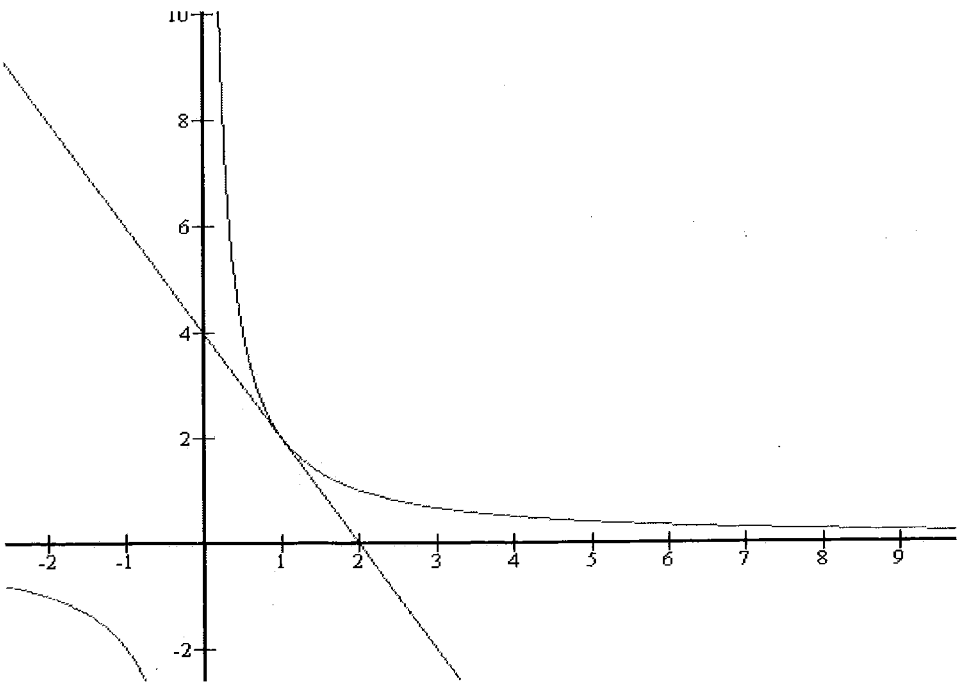
2.- RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ORIGINAL:

Al resolver el problema de hallar el área del triángulo formado por la recta tangente en el punto x=2 y los ejes cartesianos, obtuve el siguiente resultado:

$f(x)=\frac{2}{x}$ cuya derivada $f'(x)=\frac{-2}{x^2}$

sustituyendo el valor de x en la derivada obtenemos el valor de la pendiente la recta tangente (que es de la forma $y=mx+n$ donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen)

m = -2 por lo que la recta tangente es igual a $y=-2x+4$



Podemos observar claramente que la recta tangente corta a los ejes cartesianos en los puntos $x = 2$ e $y = 4$. Para comprobar el resultado sustituimos en la ecuación de la función

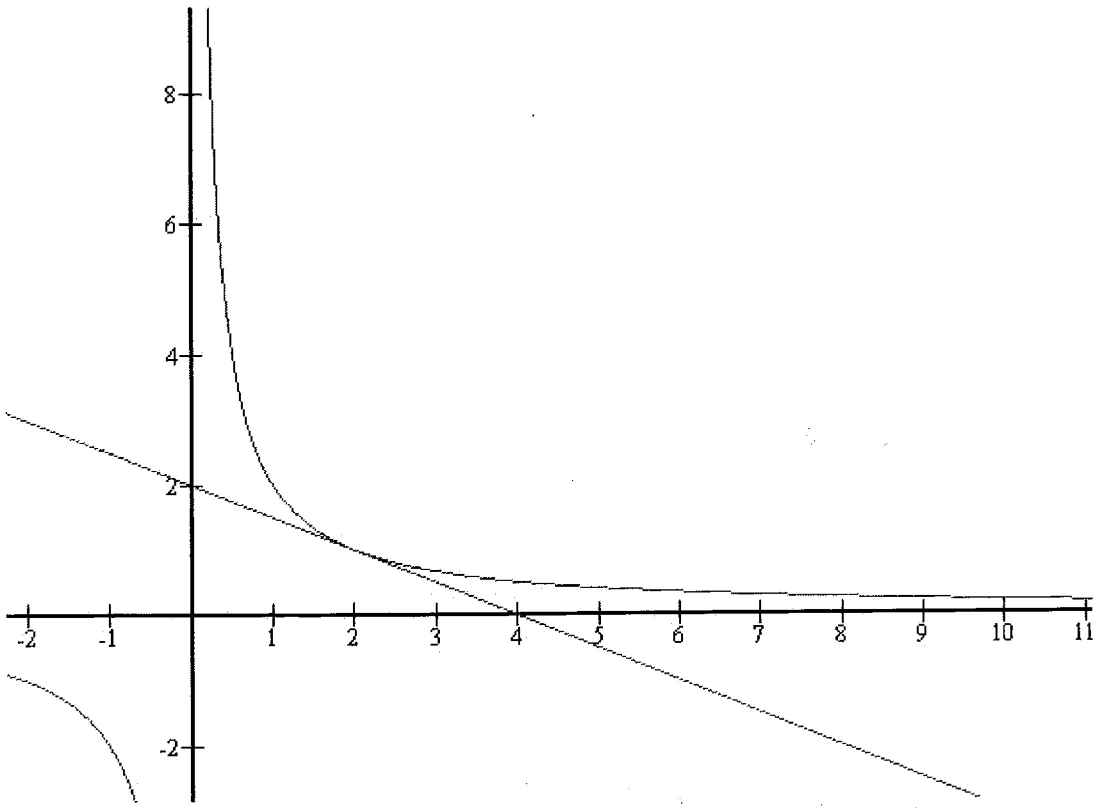
Si $x = 0$; $y = 4$

Si $y = 0$; $0 = -2 \cdot 2 + 4$; $x = 2$

Por lo tanto, el triángulo que se forma tiene como base 2 unidades y como altura 4 unidades de modo que el área de dicho triángulo será $\frac{base \cdot altura}{2}$

$A_{\text{triángulo}} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\ u^2$

En el caso de la recta tangente en el punto $x = 2$



$A_{\text{triángulo}} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4\ u^2$

Fue tal mi sorpresa que a partir de este momento se me ocurrió indagar para saber si efectivamente el área del triángulo que se forma es igual a 4 u^2 siempre.

Recta tangente a $f(x)$ en un punto en el que $x = n$ donde n es un valor cualquiera perteneciente a los números reales: $y-\frac{2}{2}=\frac{-2}{n^2}(x-n)$

sustituimos x e y por 0 para hallar los puntos de corte con los ejes y así poder calcular después el área del triángulo:

Puntos de corte con los ejes:

y = 0; x = 2n

x=0; $y=\frac{4}{n}$

$$A_{\text{triángulo}}=\frac{2n\cdot\frac{4}{n}}{2}=4\ u^2$$

Con esta solución llegamos a la conclusión de que en todos los casos el área del triángulo formado por la recta tangente a la función y los ejes x e y es siempre constante, de valor 4 unidades cuadradas.

3.- BÚSQUEDA DE FUNCIONES QUE CUMPLAN LA MISMA PROPIEDAD:

Después de esta conclusión me surgió la duda sobre si existirían más funciones que tuvieran la misma propiedad, por lo que me decidí a la búsqueda de la ecuación diferencial que caracterizara esta propiedad.

Partimos de una función f(x) cualquiera y un punto cualquiera "a":
la recta tangente a f(x) en el punto "a" sería: $y-y(a)=y'(a)(x-a)$

Corte con el eje OX (y = 0):

$0-y(a)=y'(a)(x-a)$; despejando: $x=\frac{-y'(a)}{y'(a)}+a$

Corte con el eje OY(x = 0):

$y-y(a)=y'(a)(0-a)$ despejando: $y=-ay'(a)+y(a)$

Ahora sustituimos en la ecuación del área y lo igualamos al área del triángulo, que es constante:

Área: $\frac{1}{2}\cdot(\frac{-y(a)}{y'(a)}+a)\cdot(y(a)-ay'(a))=4$

Desarrollamos la ecuación:

$8y'=(ay'(a)-y(a))(y(a)-ay'(a))$

$8y'=-(ay'(a)-y(a))^2$

Llegamos a la ecuación diferencial lineal:

$$(y-xy')^2=-8y'$$

Ahora surge el problema de como resolverla, ya que es una ecuación complicada de resolver. Si derivamos la expresión la ecuación diferencial se convierte en una ecuación diferencial lineal, algo más sencilla de resolver. Derivando obtenemos:

$2(y-xy')(y'-[y'+xy''])=-8y''$

$2(y-xy')(-xy'')=-8y''$

Agrupándolo queda la ecuación diferencial de segundo orden del modo siguiente:

$-2xy''(y-xy')=8y''$

Operando:

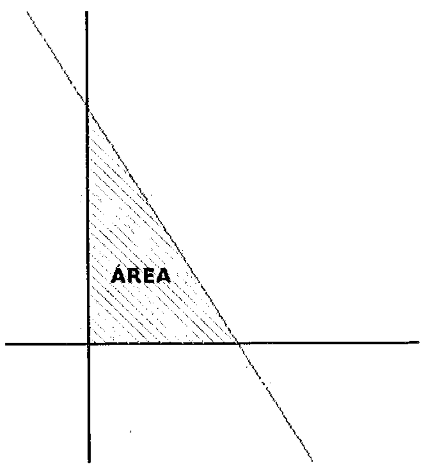
$-4y''=xy''(y-xy')$; de esta expresión obtenemos dos ecuaciones diferenciales que son las siguientes:

Caso a) $y''=0$,

Caso b) $\frac{-4}{x}=xy'-y$

Caso a)

En el caso de que y'' = 0, y' = k y esta propiedad la cumplen las rectas de la forma $y=kx+C$. Esta solución se podría haber visto a simple vista ya que una recta que pase por x = 2 e y = 4 ya cumple esta ecuación.



•

Para hallar las rectas: $y=ax+b$

corta al eje OY en el punto: $y=b$

corta al eje OX en el punto: $x=\frac{-b}{a}$

Por lo tanto, el área del triángulo deberá ser:

$A=\frac{1}{2}b(\frac{-b}{a})=4$; operando, $\frac{-b^2}{a}=8$; $a=\frac{-b^2}{8}$

La familia de rectas que cumple esa propiedad es:

$$y=\frac{-b^2}{4}x+b$$

Caso b)

En el caso en el que $y'' \neq 0$ $y\neq 0$; $2x(y-xy')=\frac{8y''}{y''}$

Operando llegamos a la ecuación diferencial lineal que es: $y-xy'=\frac{4}{x}$

Para obtener la segunda solución de la ecuación diferencial desarrollamos la expresión de arriba:

$y'-\frac{1}{x}y=\frac{-4}{x^2}$

para hallar la solución de la ecuación primero se debe hallar la solución de la ecuación homogénea y para ello:

$y'-\frac{1}{x}y=0$; $\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}$

$\int(\frac{y'}{y})dx=\int(\frac{1}{x})dx$; $L(y)=L(x)+C$; $E^{\ln y}=E^{\ln x+C}$; $y=E^{\ln x} * E^C$

Si consideramos E^C como una constante K la solución homogénea es $y=Kx$ y ahora utilizamos el método de variación de las constantes ya que me permite encontrar la solución a la ecuación completa:

Sea $y(x)=K(x)x$ derivamos obteniendo: $y'(x)=K'(x)x+K(x)$ que desarrollamos:

$xK'+K-\frac{1}{2}xK=\frac{-4}{x^2}$

$xK'+K-K=\frac{-4}{x^2}$

Llegamos a la solución de que $K'=\frac{-4}{x^3}$ por lo que resolvemos la integral para hallar K:

$K=\int(\frac{-4}{x^3})dx=\int -4x^{-3}dx=-4\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{2}{x^2}+C$

Por lo tanto, la solución a la ecuación que era $y=Kx$ ahora es:

$$y=x\left(\frac{2}{x^2}+C\right);\ y=\frac{2}{x}+Cx$$

Es decir las soluciones de la ecuación diferencial son:

$$y=\frac{2}{x}+Cx$$

Ahora hay que hallar el valor de C para que el área sea igual a 4 u^2.

$$y'=\frac{-2}{x^2}+C$$

La recta tangente a esa función y en un punto es:

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y-\left(\frac{2}{x_0}+Cx_0\right)=\left(C-\frac{2}{x_0^2}\right)(x-x_0)$$

Calculamos el corte con el eje OY (x = 0)

$$y=-x_0\left(C-\frac{2}{x_0^2}\right)+\left(Cx_0+\frac{2}{x_0}\right)=\left(\frac{2}{x_0}-Cx_0\right)+\left(\frac{2}{x_0}+Cx_0\right)=\frac{4}{x_0}$$

Calculamos el corte con el eje OX (y = 0)

$$x=\frac{-\left(\frac{2}{x_0}+Cx_0\right)}{\left(C-\frac{2}{x_0^2}\right)}+x_0=\frac{\left(\left(Cx_0-\frac{2}{x_0}\right)-\left(\frac{2}{x_0}+Cx_0\right)\right)}{\left(C-\frac{2}{x_0^2}\right)}=\frac{\left(\frac{4}{x_0}\right)}{\left(\frac{2}{x_0^2}-C\right)}$$

Finalmente el área me queda como:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x_0}\cdot\frac{\left(\frac{2}{x_0}\right)}{\left(\frac{1}{x_0^2}-C\right)}=4\ \Rightarrow\ 4-C=4\ \ si\, C=0$$

Como podemos observar, si igualamos la expresión a 4, nos queda que para que se cumpla la ecuación, C necesariamente tiene que tener el valor 0: por lo tanto, la ecuación que tiene la característica de la propiedad mencionada con anterioridad es la función:

$$y=\frac{2}{x}$$

4.- CONCLUSIÓN:

Una vez resuelto el problema nos damos cuenta de que el resultado es elemental ya que aparece de nuevo como solución la función desde la cual partimos para resolver el problema. Además, las infinitas rectas que junto con los ejes cartesianos OX y OY forman un triángulo de área 4 u^2. Hay que tener en cuenta que una recta que forma con los ejes un triángulo de área 4 tiene en todos sus puntos como tangente la propia recta, y por tanto, eso nos proporciona una familia de funciones – rectas que también son solución.

5.- BIBLIOGRAFÍA:

"Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias" A.KISELIOV, M. KRASNOV, G. MAKARENKO Editorial MIR

"Matemáticas 2" VIZMANOS. Editorial SM